

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

PROBLEMA 2

Considera le funzioni $f(x) = x + (1+x)e^{-2x}$ e $g(x) = (1+x)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Verifica che f ha un solo asintoto e determina il suo punto d'intersezione con la funzione.
2. Disegna il grafico sommario di f ; dimostra che ha un'unica intersezione con l'asse delle ascisse e determina, con tre iterazioni di un metodo iterativo a piacere, un valore approssimato.
3. Calcola le aree:
 - S_1 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da f e dal suo asintoto;
 - S_2 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da g e dall'asse x .
4. Determina la traslazione del piano nella quale la funzione g ha per immagine la funzione $g_1(x) = \frac{e^2 x}{e^{2x}}$.
5. Calcola il volume del solido generato dalla figura piana finita delimitata da g_1 e dalla retta $y = x$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

PROBLEMA 2

1. f è continua su \mathbb{R} quindi non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + (1+x)e^{-2x}) = -\infty - \infty \cdot e^{+\infty} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1+x}{x} e^{-2x}\right) = 1 + 1 \cdot e^{+\infty} = +\infty.$$

Pertanto f non ha asintoto orizzontale né obliquo per $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1+x}{e^{2x}}\right) = +\infty + 0 = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(1 + \frac{1+x}{x} \frac{1}{e^{2x}}\right) = 1 + 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right) = 0.$$

Quindi la retta $y = x$ è asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

Troviamo l'intersezione fra la f e l'asintoto:

$$\begin{cases} y = x + (1+x)e^{-2x} \\ y = x \end{cases} \rightarrow x + (1+x)e^{-2x} = x, \quad (1+x)e^{-2x} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow A(-1; -1).$$

2. Dal comportamento per x tendente a $\pm\infty$ e dal teorema di esistenza degli zeri, deduciamo che f ha almeno un punto di intersezione con l'asse delle ascisse; per dimostrarne l'unicità studiamo la derivata prima: $f'(x) = 1 - (1+2x)e^{-2x}$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - (1+2x)e^{-2x} \geq 0 \rightarrow 1 - \frac{1+2x}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow \frac{e^{2x} - 2x - 1}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0.$$

Per risolvere questa disequazione cerchiamo di capire l'andamento della funzione $u(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

$u'(x) = 2e^{2x} - 2$ quindi:

$u'(x) < 0$ per $x < 0 \rightarrow u(x)$ decrescente;

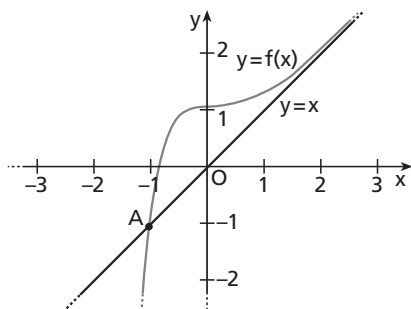
$u'(x) > 0$ per $x > 0 \rightarrow u(x)$ crescente

$u'(x) = 0$ per $x = 0 \rightarrow (0; 0)$ min. rel. e ass.

Pertanto $f'(x) = u(x)e^{-2x} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = u(x)e^{-2x} = 0$ soltanto se $x = 0$; quindi la f è monotona crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ e interseca una sola volta l'asse delle ascisse.

Completiamo lo studio di f con la derivata seconda.

$$f''(x) = 4xe^{-2x} \rightarrow \begin{array}{ll} \text{per } x < 0 & \text{la concavità è rivolta verso il basso;} \\ \text{per } x > 0 & \text{la concavità è rivolta verso l'alto;} \\ & \text{nel punto } (0; 1) \text{ flesso orizzontale.} \end{array}$$



◀ **Figura 5.**

Per determinare lo zero di f utilizziamo il metodo di bisezione. Nella tabella sono riportati i risultati di tre iterazioni a partire dall'intervallo $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

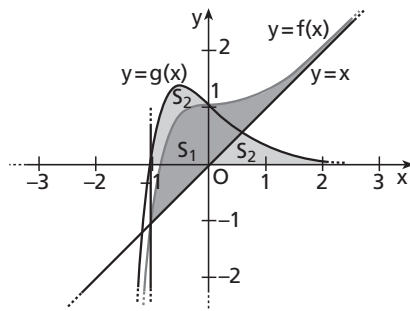
n	a	b	$f(a)$	$f(b)$	$(a+b)/2$	$f[(a+b)/2]$	errore
0	-1	-0,5	-1	0,859141	-0,75	0,370422	0,25
1	-1	-0,75	-1	0,370422	-0,875	-0,15567	0,125
2	-0,875	-0,75	-0,15567	0,370422	-0,8125	0,139704	0,0625
3	-0,875	-0,8125	-0,15567	0,139704	-0,84375	0,00093	0,03125

Pertanto $-0,84375$ è un valore approssimato dello zero di f con un'approssimazione di $0,03125$.

3. L'area S_1 , evidenziata nel grafico, si calcola con il seguente integrale improprio:

$$S_1 = \int_{-1}^{+\infty} (f(x) - x) dx = \int_{-1}^{+\infty} (x + (1+x)e^{-2x} - x) dx = \int_{-1}^{+\infty} (1+x)e^{-2x} dx = \int_{-1}^{+\infty} g(x) dx = S_2.$$

Osserviamo dunque che le aree S_1 e S_2 sono uguali.



◀ Figura 6.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+\infty} (1+x)e^{-2x} dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-1}^k (1+x)e^{-2x} dx = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \left[-\frac{1+x}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^k - \left(-\frac{1}{2} \right) \int_{-1}^k e^{-2x} dx \right\} = \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ \left[-\frac{1+k}{2} e^{-2k} - 0 \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^k \right\} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1+k}{2} e^{-2k} - \frac{1}{4} [e^{-2k} - e^2] \right\} = \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

4. Considerata la generica traslazione del piano

$$\tau: (x; y) \rightarrow (x'; y') = (x + a; y + b),$$

si tratta di determinare a e b . A questo scopo applichiamo la trasformazione all'espressione $y = g(x)$:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ y = (1+x)e^{-2x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \\ y' - b = (1 + (x' - a))e^{-2(x' - a)} \end{cases}, \begin{cases} \dots \\ \dots \\ y' = (1 + x' - a)e^{-2(x' - a)} + b \end{cases}.$$

La terza espressione deve coincidere, $\forall x \in \mathbb{R}$, con g_1 . Riscriviamo nella seguente forma g_1 :

$$y' = g_1(x') = e^2 \frac{x'}{e^{2x'}} = x' e^{-2(x'-1)}.$$

Le due espressioni di y' coincidono soltanto se:

$$(1 + x' - a) e^{-2(x'-a)} + b = x' e^{-2(x'-1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ quindi soltanto se}$$

$$\begin{cases} 1 + x' - a = x' \\ x' - a = x' - 1 \\ b = 0 \end{cases}, \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

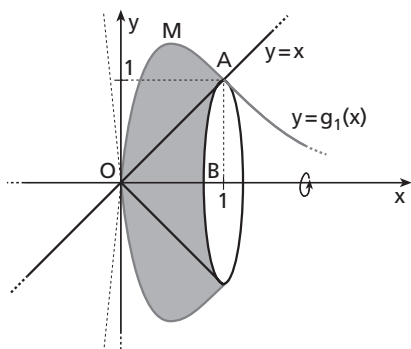
5. Utilizzando i limiti all'infinito e le derivate prima e seconda disegniamo il grafico sommario di g_1 mettendo in evidenza le intersezioni con la retta $y = x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-2(x-1)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-2(x-1)} = 0;$$

$$g_1'(x) = (1 - 2x) e^{-2(x-1)}, \quad g_1''(x) = 4(x - 1) e^{-2(x-1)};$$

$$x e^{-2(x-1)} = x \rightarrow O(0;0), A(1;1).$$

Il volume richiesto V si ottiene sottraendo al solido generato dalla rotazione dell'arco di curva \widehat{OMA} il cono di vertice O e apotema \overline{OA} .



◀ Figura 7.

$$\begin{aligned} V_{OMA} &= \int_0^1 \pi [g_1(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 x^2 e^{-4(x-1)} dx = \pi \left\{ \left[-\frac{x^2 e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_0^1 2x e^{-4(x-1)} dx \right\} = \\ &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \left\{ \left[-\frac{x e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_0^1 e^{-4(x-1)} dx \right\} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} \left[-\frac{e^{-4(x-1)}}{4} \right]_0^1 = \\ &= -\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{32} (1 - e^4) = \pi \frac{e^4 - 13}{32}. \end{aligned}$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \pi \overline{BA}^2 \cdot \overline{OB} = \frac{1}{3} \pi \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{3} \pi.$$

$$V = V_{OMA} - V_{cono} = \pi \frac{e^4 - 13}{32} - \frac{1}{3} \pi = \pi \frac{e^4}{32} - \pi \frac{71}{96}.$$