

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 2**

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$[1] \quad y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c.$$

- a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y , hanno tangente parallela all'asse x .
- b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a , b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.
- c) Determinare i coefficienti a , b , c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seci l'asse y , un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate $(2; 2)$.
- d) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.
- e) Determinare le equazioni della traslazione che, lasciando sull'asse y il flesso di K con tangente orizzontale, porti il minimo di K sull'asse x .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

a) Le curve di equazione $y=f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x . Pertanto, ponendo $f'(x)=0$, si ottiene $4x^3+3ax^2+2bx=0$ che ha soluzioni $x=0$ e $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x=0$, in cui ogni curva secca l'asse y , le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x .

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0 , interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+c$, la derivata prima è $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $f''(x)=12x^2+6ax+2b$. Posto $f''(x)>0$, risulta:

$$12x^2+6ax+2b>0 \quad \rightarrow \quad 6x^2+3ax+b>0.$$

L'equazione associata, $6x^2+3ax+b=0$, ammette soluzioni reali $x=\frac{-3a\pm\sqrt{9a^2-24b}}{12}$, con $\Delta=9a^2-24b\geq 0$.

Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto \mathbb{R} se vale la seguente relazione tra a e b :

$$9a^2-24b<0 \quad \rightarrow \quad 3a^2-8b<0.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ .

Se $\Delta>0$, cioè $3a^2-8b>0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2-8b>0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.

Se $\Delta=0$, cioè $3a^2=8b$, la derivata seconda è positiva per $x\neq -\frac{a}{4}$ e nulla per $x=-\frac{a}{4}$. La derivata prima, $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx$, diventa $f'(x)=x\left(4x^2+3ax+\frac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x<0$, nulla per $x=0$, positiva per $x>0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x=0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in \mathbb{R} .

In conclusione, la curva $y=x^4+ax^3+bx^2+c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza \mathbb{R} se a e b soddisfano la relazione: $3a^2-8b\leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x=0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0; c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x)=12x^2+6ax+2b$ si annulli per $x=0$ cioè $f''(0)=0$. Risulta quindi:

$$f''(0)=2b=0 \quad \rightarrow \quad b=0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0; c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2; 2)$, si deduce che $c=2$.

Infine, poiché la curva passa per il punto $(2; 2)$ deve valere $2=f(2)$, cioè:

$$2=2^4+a\cdot 2^3+b\cdot 2^2+c \quad \rightarrow \quad 8a+4b+c=-14.$$

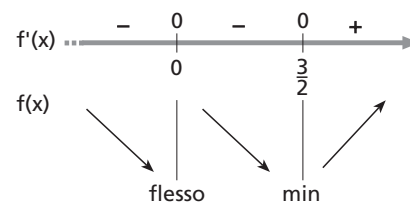
Si pongono a sistema le relazioni trovate:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ 8a+4b+c=-14 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ a=-2 \end{cases}.$$

La curva ha equazione: $y=x^4-2x^3+2$.

d) Si studia la curva K di equazione $f(x) = x^4 - 2x^3 + 2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali e si ha: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Per le considerazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0; 2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione $t_1: y = 2$. La derivata prima è $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

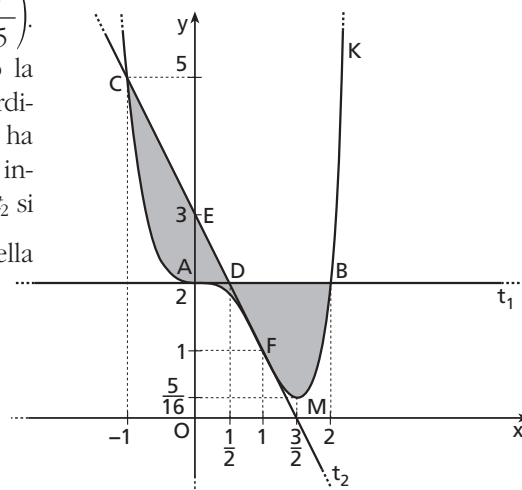
▼ Figura 4.



La curva ha un minimo assoluto di coordinate $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$.

La derivata seconda vale $f''(x) = 12x^2 - 12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x = 1$, di coordinate $F(1; 1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione $t_2: y - 1 = f'(1)(x - 1)$ cioè $y = -2x + 3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1; 5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. Nella

figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



► Figura 5.

La regione finita di piano è formata dal triangolo ADE e da due figure mistilinee CAE e $AFMB$, di superficie rispettivamente S_{ADE} , S_{CAE} e S_{AFMB} . Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AE} \rightarrow S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^0 (-2x + 3 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[-x^2 + x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^0 = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_0^2 (2 - x^4 + 2x^3 - 2) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 \right]_0^2 = \frac{8}{5}.$$

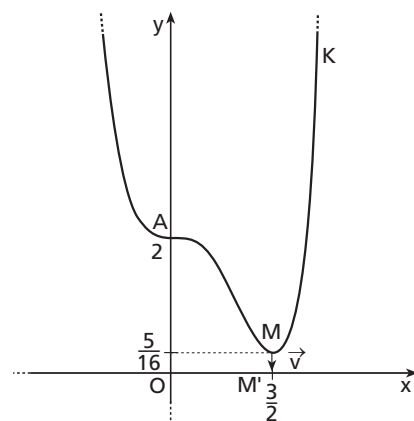
L'area S della regione finita di piano delimitata dalla curva K e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \rightarrow S = \frac{1}{4} + \frac{13}{10} + \frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

e) Tenendo conto che il flesso $A(0; 2)$ deve rimanere sull'asse y , il vettore di traslazione $\vec{v}(a; b)$ ha componente orizzontale nulla ovvero $a=0$ e la traslazione è verticale. Inoltre, se il minimo $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{16}\right)$ ha il suo trasformato sull'asse x , $M'\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ (figura 6), la componente verticale b di \vec{v} deve valere $-\frac{5}{16}$.

Pertanto il vettore di traslazione è $\vec{v}\left(0; -\frac{5}{16}\right)$ e le corrispondenti equazioni sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \frac{5}{16} \end{cases}.$$



▲ Figura 6.