PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

PROBLEMA 2

a) La funzione $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale si può scrivere come:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{x^2+2m}, & \text{per } m>0\\[2mm] \dfrac{2x+1}{x^2}, & \text{per } m\le 0\end{cases},\quad f(x) \text{ è derivabile } \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, & \text{per } m>0\\ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}, & \text{per } m\le 0\end{cases}.$$

b) Per $m\le 0$ risulta: $f'(x)=\dfrac{2x^2-2x(2x+1)}{x^4}\Rightarrow f'(1)=-4\neq 0.$

Per $m>0$ risulta: $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2m)-2x(2x+1)}{(x^2+2m)^2}\Rightarrow f'(1)=\dfrac{4(m-1)}{(1+2m)^2}=0\Rightarrow m=1.$

c) La funzione da studiare è: $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Le intersezioni con gli assi sono: $A\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ con l'asse delle ascisse, $B\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ con l'asse delle ordinate.

Si ha inoltre: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0^-$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^+$. Il grafico ha l'asintoto orizzontale $y=0$.

La derivata prima risulta: $f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x^2+x-2)}{(x^2+2)^2}=\dfrac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$,

$f'(x)\ge 0\Rightarrow -2\le x\le 1$, quindi (vedi anche figura 5) si ha un minimo nel punto $m\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$ ed un massimo nel punto $M(1;1)$.

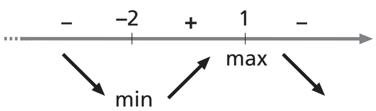


Figura 5.

Studiando la derivata seconda si ottiene:

$$f''(x)=-2\cdot\frac{(2x+1)(x^2+2)-2(x^2+x-2)\cdot 2x}{(x^2+2)^3}=\frac{2(2x^3+3x^2-12x-2)}{(x^2+2)^3},$$

$f''(x)\ge 0\Rightarrow 2x^3+3x^2-12x-2\ge 0$, l'equazione non si scompone con la regola di Ruffini, ma si osserva che, per il teorema fondamentale dell'algebra, ha al massimo tre radici, quindi tre flessi. I risultati ottenuti in precedenza per i limiti negli estremi del dominio ed i valori dei punti di massimo e di minimo permettono di determinare che i flessi devono essere almeno tre. In definitiva i flessi sono proprio tre.
In conclusione si può tracciare il grafico della funzione (figura 6).

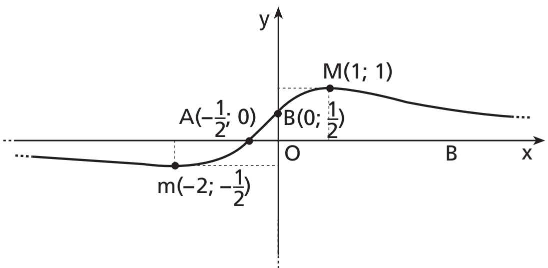


Figura 6.

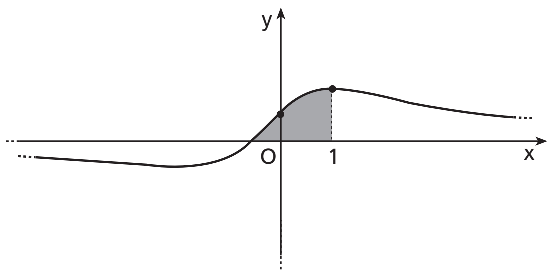
d) L'area richiesta (figura 7) si ottiene dall'integrale:

$$A=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x+1}{x^2+2}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{x^2+2}\,dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{2x}{x^2+2}\,dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{1}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,dx,$$

ma $d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx$, allora

$$A=\Big[\ln(x^2+2)\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}=\ln\left(\frac{4}{3}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=0{,}963193.$$



◀ **Figura 7.**