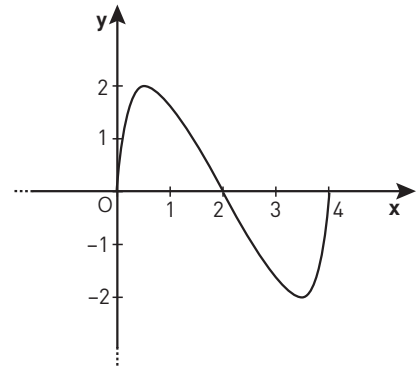


**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014**

■ **PROBLEMA 2**

Sia $f(x) = (2 - x)\sqrt{4x - x^2}$.

1. A lato è disegnato il grafico Γ di $f(x)$. Si dimostri che $(2; 0)$ è centro di simmetria di Γ e si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'angolo che la tangente in esso a Γ forma con la direzione positiva dell'asse x .
2. Si dimostri che, qualunque sia t , $0 < t < 2$, le rette tangenti a Γ nei suoi punti di ascisse $2 + t$ e $2 - t$ sono parallele. Esistono rette tangenti a Γ che siano parallele alla retta $21x + 10y + 31 = 0$? E che siano parallele alla retta $23x + 12y + 35 = 0$?
3. Si calcoli l'area della regione compresa tra Γ e l'asse x .
4. Sia $b(x) = \sin(f(x))$. Quanti sono i punti del grafico di $b(x)$ di ordinata 1? Il grafico di $b(x)$ presenta punti di minimo, assoluti o relativi? Per quali valori reali di k l'equazione $b(x) = k$ ha 4 soluzioni distinte? Qual è il valore di $\int_0^4 b(x)dx$?



▲ **Figura 2.**

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

PROBLEMA 2

1. Sia data la funzione $f(x) = (2-x)\sqrt{4x-x^2}$. Essa ha dominio $[0; 4]$. Per verificare che il corrispondente grafico Γ è simmetrico rispetto al punto $(2; 0)$, applichiamo alla funzione la simmetria centrale di centro $(2; 0)$, di equazioni:

$$\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 4 - x' \\ y = -y' \end{cases}$$

e verifichiamo come si comporta la curva rispetto a tale trasformazione:

$$\begin{aligned} y &= (2-x)\sqrt{4x-x^2} \rightarrow -y' = [2-(4-x')]\sqrt{4(4-x')-(4-x')^2} \rightarrow \\ &\rightarrow y' = (2-x')\sqrt{16-4x'-16-x'^2+8x'} \rightarrow y' = (2-x')\sqrt{4x'-x'^2}. \end{aligned}$$

Si conclude che la curva è unita rispetto alla trasformazione e che pertanto il punto $(2; 0)$ è centro di simmetria di Γ .

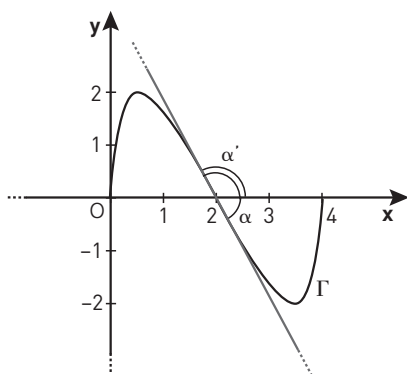
Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente al grafico nel punto $x=2$ ricordando che equivale alla derivata prima della funzione calcolata in quel punto:

$$f'(x) = -\sqrt{4x-x^2} + \frac{(2-x)(2-x)}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{-4x+x^2+4-4x+x^2}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2x^2-8x+4}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$m = f'(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 + 4}{\sqrt{4 \cdot 2 - 2^2}} = -2.$$

L'angolo α che la tangente forma con la direzione positiva dell'asse x è rappresentato dall'arcotangente del valore di m ovvero:

$$\alpha = \operatorname{arctg} m = \operatorname{arctg}(-2) = -63,43\dots^\circ.$$



Si tratta di un angolo negativo ovvero il proprio secondo lato si trova in senso orario sotto il semiasse positivo delle x (figura 7). Il corrispondente angolo positivo α' è:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 180^\circ + \operatorname{arctg} m = 180^\circ + \operatorname{arctg}(-2) = \\ &= 180^\circ - 63,43\dots^\circ = 116,56\dots^\circ \approx 116^\circ 34'. \end{aligned}$$

◀ **Figura 7.**

2. Considerato t , con $0 < t < 2$, calcoliamo i coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico Γ nei suoi punti di ascisse $2+t$ e $2-t$.

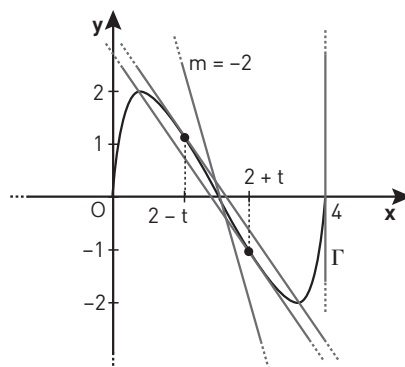
$$m(2+t) = f'(2+t) = \frac{2(2+t)^2 - 8(2+t) + 4}{\sqrt{4(2+t) - (2+t)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}},$$

$$m(2-t) = f'(2-t) = \frac{2(2-t)^2 - 8(2-t) + 4}{\sqrt{4(2-t) - (2-t)^2}} = \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}}.$$

Poiché $m(2+t) = m(2-t)$, con $0 < t < 2$, allora le corrispondenti rette sono parallele (figura 8). Osserviamo inoltre che agli estremi dell'intervallo del dominio risulta:

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} m(2+t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}} = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow 2^-} m(2-t) = \lim_{t \rightarrow 2^-} \frac{2t^2 - 4}{\sqrt{-t^2 + 4}} = +\infty.$$

Consideriamo le rette $21x + 10y + 31 = 0$ e $23x + 12y + 35 = 0$. Esse hanno coefficiente angolare rispettivamente $m = -\frac{21}{10} < -2$ e $m = -\frac{23}{12} > -2$. Per stabilire se esistono rette tangenti a Γ che siano parallele a queste, è necessario valutare i coefficienti angolari delle rette tangenti nel dominio. Per il punto 1 il coefficiente angolare della retta tangente nel punto $x = 2$ vale -2 . Per le considerazioni precedenti, cioè per $x \neq 2$ nei punti $(2-t)$ e $(2+t)$ il coefficiente angolare tende a $+\infty$, e osservando la figura 8 si deduce che $m \geq -2$.



▲ Figura 8.

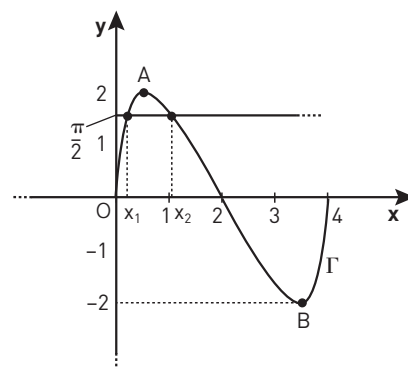
Pertanto non può esistere una retta tangente a Γ con coefficiente angolare uguale a $-\frac{21}{10}$, mentre esistono due rette tangenti e parallele con coefficiente angolare $m = -\frac{23}{12} > -2$.

3. Dimostrata la simmetria del grafico Γ nel punto 1, l'area \mathcal{A} della regione compresa tra Γ e l'asse x è il doppio dell'integrale definito dalla funzione $f(x)$ calcolata in $[0; 2]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 2 \cdot \int_0^2 (2-x)\sqrt{4x-x^2} \, dx = \int_0^2 (4-2x)\sqrt{4x-x^2} \, dx = \\ &= \left[\frac{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^2 = \frac{2}{3} \left(4^{\frac{3}{2}} - 0 \right) = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

4. Sia $b(x) = \sin((2-x)\sqrt{4x-x^2})$ con $0 \leq x \leq 4$.

Per determinare quanti punti del grafico di $b(x)$ hanno ordinata 1, osserviamo che la funzione $b(x) = \sin(f(x))$ assume valore 1 per $f(x) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.



▲ Figura 9.

Dal grafico (figura 9) si deduce che la funzione $f(x)$ assume valori compresi tra -2 e 2 e che pertanto acquista il valore $\frac{\pi}{2}$ in due punti x_1 e x_2 , per cui $b(x_1) = b(x_2) = 1$. Quindi i punti del grafico di $b(x)$ di ordinata 1 sono due.

Per dedurre l'andamento della funzione $b(x) = \sin(f(x))$ studiamo puntualmente i massimi e i minimi della funzione $f(x)$ osservando il grafico Γ . Dal punto 1 è noto che $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4x + 2)}{\sqrt{4x - x^2}}$. Tale derivata si annulla per $x_A = 2 - \sqrt{2}$, con $f(x_A) = 2$ (massimo assoluto) e per $x_B = 2 + \sqrt{2}$, con $f(x_B) = -2$ (minimo assoluto).

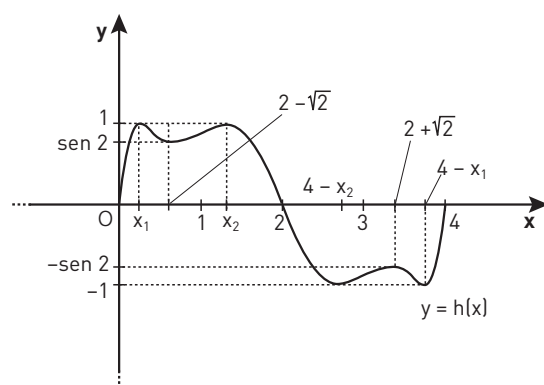
Poiché Γ è simmetrica rispetto al punto $(2; 0)$ e la funzione è dispari, il grafico di $b(x)$ risulta ancora simmetrico rispetto al punto $(2; 0)$, pertanto studiamo l'andamento della funzione $b(x) = \sin(f(x))$ nell'intervallo $[0; 2]$.

- $b(0) = b(2) = 0$;
- per $0 < x < x_1$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow b(x)$ crescente e $0 < b(x) < 1$;
- per $x = x_1$, $f(x_1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow b(x_1) = 1$;
- per $x_1 < x < 2 - \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ crescente $\rightarrow b(x)$ decrescente e $\sin 2 < b(x) < 1$;
- per $x = 2 - \sqrt{2}$, $f(2 - \sqrt{2}) = 2 \rightarrow b(2 - \sqrt{2}) = \sin 2$;
- per $2 - \sqrt{2} < x < x_2$, $\frac{\pi}{2} < f(x) < 2$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow b(x)$ crescente e $\sin 2 < b(x) < 1$;
- per $x = x_2$, $f(x_2) = \frac{\pi}{2} \rightarrow b(x_2) = 1$;
- per $x_2 < x < 2$, $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$ e $f(x)$ decrescente $\rightarrow b(x)$ decrescente e $0 < b(x) < 1$.

Rappresentiamo in figura 10 l'andamento di $b(x)$ tenendo conto della simmetria centrale in $(2; 0)$.

La funzione $b(x)$ presenta:

- due massimi assoluti nei punti x_1 e x_2 , con $b(x_1) = b(x_2) = 1$;
- un massimo relativo per $x = 4 - (2 - \sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2}$, con $b(2 + \sqrt{2}) = -\sin 2$;
- un massimo relativo in $x = 4$, con $b(4) = 0$;
- due minimi assoluti in $x = 4 - x_2$ e $x = 4 - x_1$ con $b(4 - x_2) = b(4 - x_1) = -1$;
- un minimo relativo per $x = 2 - \sqrt{2}$, con $b(2 - \sqrt{2}) = \sin 2$;
- un minimo relativo in $x = 0$, con $b(0) = 0$.



◀ **Figura 10.**

Osservando il grafico di $b(x)$ vediamo che l'equazione $b(x) = k$ ha quattro soluzioni distinte quando una

retta $y = k$ interseca il grafico in quattro punti distinti, ovvero per $\sin 2 < k < 1$ e per $-1 < k < -\sin 2$.

L'integrale $\int_0^4 b(x) dx$ può essere calcolato per la proprietà additiva come

$$\int_0^4 b(x) dx = \int_0^2 b(x) dx + \int_2^4 b(x) dx.$$

Per la simmetria centrale del grafico di $b(x)$ rispetto al punto $(2; 0)$ e per il significato geometrico di integrale definito, risulta $\int_2^4 b(x) dx = -\int_0^2 b(x) dx$ e quindi:

$$\int_0^4 b(x) dx = \int_0^2 b(x) dx - \int_0^2 b(x) dx = 0.$$