ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione

$$x+y=4.$$

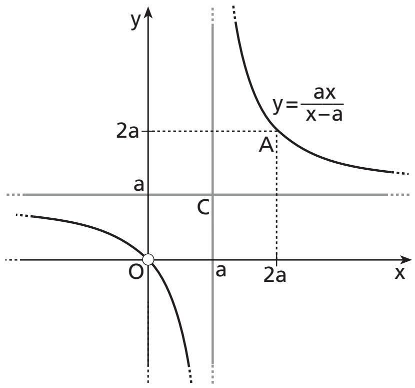
c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

PROBLEMA 1

a) Posto $x \neq 0$ e $y \neq 0$, la relazione $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}$ diventa $ay+ax=xy$ da cui $y=\frac{ax}{x-a}$. La funzione da studiare è $y=\frac{ax}{x-a}$ con dominio $x \neq 0 \wedge x \neq a$. Si tratta di una funzione omografica il cui grafico è un'iperbole equilatera con asintoti $x=a$ e $y=a$, centro di simmetria $C(a;\ a)$ e vertici $A(2a;\ 2a)$, $O(0;\ 0)$. In quest'ultimo punto la funzione non è però definita e presenta una discontinuità di terza specie con $x \to 0 \frac{ax}{x-a}$. Si può tracciare il grafico (figura 1) nel quale il valore di a è stato scelto in maniera arbitraria.



▲ **Figura 1.**

b) Si valuta la posizione reciproca tra la funzione e la retta discutendo il sistema $\begin{cases} y=\frac{ax}{x-a} \\ x+y=4 \end{cases}$.

L'equazione risolvente è $x^2-4x+4a=0$; essa ammette soluzioni reali se e solo se il discriminante è positivo o nullo. Poiché $\frac{\Delta}{4}=4-4a$, risulta $4-4a \geq 0$ per $a \leq 1$.

Pertanto la retta t è secante per $a<1$, è tangente per $a=1$.

c) La circonferenza k ha centro $C'(1;\ 1)$ noto e raggio incognito. Si tracci la perpendicolare $C'H$ alla retta t (figura 2). Per un teorema della geometria euclidea, tale perpendicolare divide a metà la corda BD che la circonferenza stacca sulla retta. La distanza del punto $C'(1;\ 1)$ dalla retta $x+y=4$ vale:

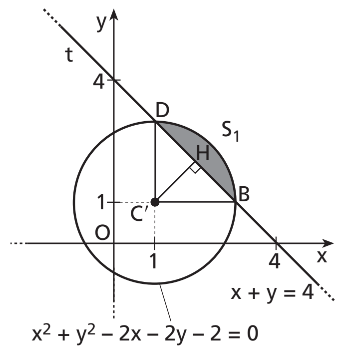
$$\overline{C'H}=\frac{|1+1-4|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2},$$

mentre $\overline{HB}=\frac{\overline{BD}}{2} \to \overline{HB}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $BC'H$, risulta $\overline{C'B}=2$. Esso è il raggio cercato.

L'equazione della circonferenza k è:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4 \text{ ovvero } x^2+y^2-2x-2y-2=0.$$



▲ **Figura 2.**

d) Ponendo a sistema l'equazione della circonferenza k e la retta t si trovano le coordinate dei punti B e D:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-2=0 \\ x+y=4 \end{cases} \to B\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases};\ D\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}.$$

Valutando le coordinate dei punti C', B e D si osserva che i segmenti $C'B$ e $C'D$ sono rispettivamente paralleli agli assi cartesiani e quindi tra loro perpendicolari. Pertanto il settore circolare delimitato dall'angolo $B\hat{C'}D$ è la quarta parte del cerchio corrispondente alla circonferenza. Indicata con S_1 l'area del minore dei segmenti circolari in cui la retta t divide la circonferenza k, essa si ottiene per differenza tra l'area del settore e l'area del triangolo $C'BD$.

$$S_1 = \frac{\pi(2)^2}{4} - \frac{2 \cdot 2}{2} = \pi - 2.$$

L'area S_2 del restante segmento circolare si ricava per differenza tra l'area del cerchio e S_1:

$$S_2 = \pi(2)^2 - (\pi - 2) = 3\pi + 2.$$

e) La risoluzione è compiuta per via geometrica poiché la discussione algebrica della tangenza tra circonferenza e iperbole porterebbe a un sistema di quarto grado difficilmente risolvibile per via elementare. Nella figura 3 sono rappresentate le possibili posizioni dell'iperbole parametrica rispetto alla circonferenza.

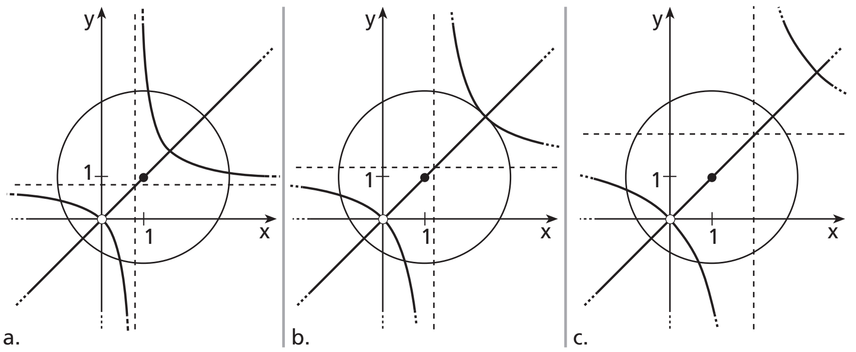


Figura 3.

Si osserva che entrambe le curve sono simmetriche rispetto alla bisettrice del I e III quadrante: nella circonferenza il centro si trova sulla bisettrice che è pertanto diametro e quindi asse di simmetria della circonferenza; nell'iperbole la retta $x = y$ costituisce l'asse trasverso dell'iperbole stessa e pertanto è asse di simmetria. Ne consegue che i punti di intersezione tra le due curve sono a due a due simmetrici rispetto all'asse di simmetria $y = x$. Nel caso della tangenza due di questi punti devono coincidere e quindi trovarsi sulla bisettrice. Si trova il punto di tangenza T (figura 3b) risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \text{(non accettabile)} \vee \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \end{cases}.$$

Si impone all'iperbole $x = \dfrac{ax}{x - a}$ il passaggio per il punto $T(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$:

$$1 + \sqrt{2} = \frac{a(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2} - a} \rightarrow (1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2} - a) = a(1 + \sqrt{2}) \rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

L'iperbole è tangente alla circonferenza k per $a = \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}$.