ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

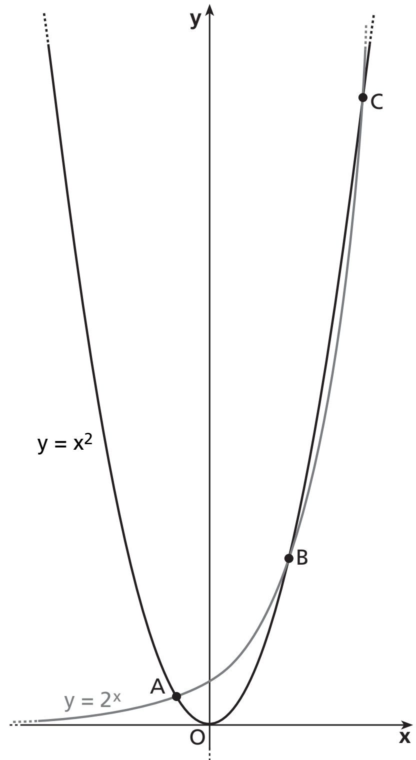
PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite, per ogni x reale, da $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$.

1. Si traccino i grafici di f e g e si indichi con A la loro intersezione di ascissa negativa.
2. Si calcoli, con uno dei metodi di approssimazione numerica studiati, l'ascissa di A con due cifre decimali esatte.
3. Quanti e quali sono gli zeri della funzione $h(x) = 2^x - x^2$? Si tracci il grafico di h.
4. Si calcoli l'area racchiusa dal grafico di h e dall'asse x sull'intervallo $[2; 4]$.

PROBLEMA 2

1. La funzione $f(x) = 2^x$ è la funzione esponenziale di base 2, mentre $g(x) = x^2$ è una parabola con asse verticale, vertice nell'origine e concavità rivolta verso l'alto. Tracciamo i corrispondenti grafici e indichiamo con A, B, C i punti di intersezione delle due curve (figura 6).



▲ **Figura 6.**

2. Nella figura 6 osserviamo che il punto A ha ascissa negativa ed è uno zero della funzione $h(x) = 2^x - x^2$. Tale funzione è definita, continua e derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$. Inoltre risulta

$$h(0) = 1 > 0, \quad h(-1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

pertanto $-1 < x_A < 0$.
La derivata prima e seconda hanno forma:

$$h'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x,$$
$$h''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2.$$

La derivata seconda è crescente nell'intervallo $[-1;\ 0]$, inoltre:

$$h''(-1) = \frac{\ln^2 2}{2} - 2 < 0, \qquad h''(0) = \ln^2 2 - 2 < 0.$$

In tale intervallo la derivata seconda mantiene costante e negativo il suo segno, concorde con $h(-1)$.
Applichiamo il metodo delle tangenti nell'intervallo $[-1;\ 0]$ per determinare x_A, utilizzando la formula di ricorrenza:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)}.$$

I primi quattro termini di tale successione sono:

$$x_0 = -1,$$

$$x_1 = x_0 - \frac{h(x_0)}{h'(x_0)} = -1 + \frac{1}{\ln 2 + 4} \simeq -0{,}7869,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{h(x_1)}{h'(x_1)} \simeq -0{,}7668,$$

$$x_3 = x_2 - \frac{h(x_2)}{h'(x_2)} \simeq -0{,}7666.$$

Poiché $|x_3 - x_2| = 0{,}0002 < 0{,}01$, il valore approssimato di x_A con due cifre decimali esatte è:

$$x_A \simeq 0{,}76.$$

3. Come già osservato nel punto 2 la funzione $h(x) = 2^x - x^2$ è definita, continua e derivabile infinite volte

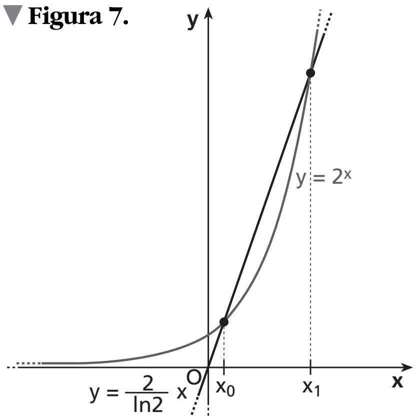
in $\mathbb{R}$. Inoltre risulta $h'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e $h''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2$.
Dal grafico di figura 6 si deduce che, essendo tre i punti di intersezione tra le curve $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$, gli zeri della funzione differenza $h(x) = 2^x - x^2$ sono pertanto tre, di ascissa x_A, x_B e x_C. Ovvero:

$x_A \simeq 0{,}76$, per il punto 2;
$h(0) = 1 > 0, \quad h(3) = 8 - 9 = -1 < 0, \quad h(2) = 4 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x_B = 2;$
$h(3) = -1 < 0, \quad h(5) = 32 - 25 = 7 > 0 \quad h(4) = 16 - 16 = 0 \quad \rightarrow \quad x_C = 4.$

L'unicità e l'esistenza degli zeri della funzione h può essere confermata alla luce del calcolo della derivata prima e seconda e del loro segno.
Studiamo la derivata prima $h'(x) = (\ln 2) \cdot 2^x - 2x$ e il suo segno. Benché non sia possibile stabilire con esattezza gli zeri di questa funzione, osserviamo che i punti in cui tale derivata si annulla sono quelli che verificano l'equazione $2^x = \dfrac{2x}{\ln 2}$, ossia le ascisse dei punti di intersezione delle due curve $y = 2^x$ e $y = \dfrac{2x}{\ln 2}$ che mettiamo a sistema:

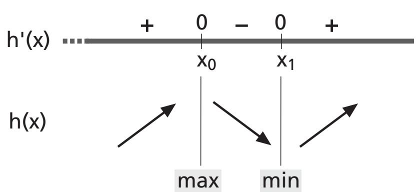
$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = \dfrac{2}{\ln 2} x \end{cases}$$

Essendo $y = 2^x$ una funzione convessa, le intersezioni di questa esponenziale con la retta $y = \dfrac{2x}{\ln 2}$ possono essere al più 2 (figura 7).



▼ **Figura 7.**

Poiché $h'(0) = \ln 2 \cdot 1 = \ln 2 > 0$, $h'(1) = 2(\ln 2 - 1) < 0$, mentre $h'(4) = 8(2 \ln 2 - 1) > 0$, concludiamo che gli unici zeri di $h'(x)$ sono $x_0 \in]0; 1[$ e $x_1 \in]1; 4[$.
In figura 8 è rappresentato il quadro dei segni della derivata prima $h'(x)$.



▲ **Figura 8.**

La derivata seconda $h''(x) = (\ln^2 2) \cdot 2^x - 2$ si annulla per:

$$(\ln^2 2) \cdot 2^x = 2 \quad \rightarrow \quad 2^x = \frac{2}{\ln^2 2} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \frac{\ln \dfrac{2}{\ln^2 2}}{\ln 2} = 1 - 2\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} = \overline{x} \simeq 2{,}5.$$

Pertanto la funzione h ha concavità rivolta verso il basso per $x < \overline{x}$, concavità verso l'alto per $x > \overline{x}$.
Suddividiamo il dominio di h in 5 intervalli:

- in $]-\infty; -1]$, $h' > 0$ e quindi h è crescente; poiché $h(-1) < 0$ segue che $h(x) < 0$ per $x < -1$;
- analogamente si verifica che $h' > 0$ in $[5; +\infty[$ ed essendo $h(5) > 0$ segue che $h(x) > 0$ per $x \geq 5$;
- in $[-1; 0]$ la funzione h ha un solo zero, per il primo teorema di unicità dello zero, infatti $h(-1) \cdot h(0) < 0$ e $h'(x) \neq 0$ per $-1 < x < 0$; si osservi che tale zero è l'ascissa del punto A;
- in $[0; \overline{x}]$ la funzione h ha un solo zero per il secondo teorema di unicità dello zero; per lo stesso teorema, ha un solo zero in $[\overline{x}; 5]$, essendo $h(\overline{x}) \cdot h(5) < 0$ e $h''(x) > 0$ per $\overline{x} < x < 5$.

Pertanto le uniche intersezioni con gli assi cartesiani della funzione h sono:

$(x_A; 0), \quad (2; 0), \quad (4; 0), \quad (0; 1).$

Il quadro del segno di h è:

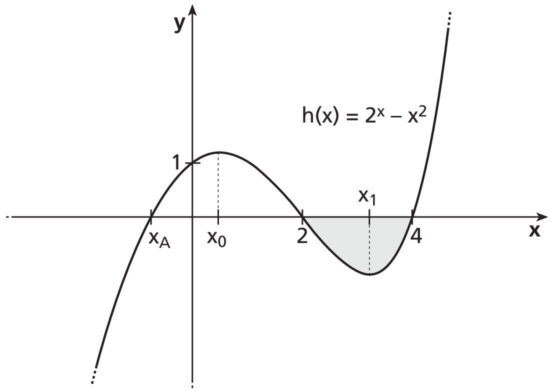
$h(x) > 0$ per $x_A < x < 2$ e $x > 4$;
$h(x) < 0$ per $2 < x < 4$.

In figura 9 è riportato il grafico della funzione h.

4. L'area della regione racchiusa tra il grafico di h e l'asse x sull'intervallo [2; 4], evidenziata in figura 9, è:

$$\text{Area} = \int_2^4 -(2^x - x^2)dx = \left[-\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^3}{3}\right]_2^4 =$$

$$= \frac{56}{3} - \frac{12}{\ln 2}.$$



▲ **Figura 9.**