

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 2**

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

- a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π , che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
- b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
- c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 2**

a) Posto $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$, essa può essere scritta come $f_a(x) = \frac{1}{\cos x} + a \tan x$. La periodicità della funzione coseno è 2π , cosicché $\frac{1}{\cos x}$ è periodica di periodo $T_1 = 2\pi$; $\tan x$ ha periodicità π per cui il periodo di $a \tan x$ è $T_2 = \pi$. La funzione f_a è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo $T = \text{m.c.m.}(T_1, T_2)$ cioè $T = 2\pi$.

Presi due valori arbitrari di a , a_1 e a_2 con $a_1 \neq a_2$, e le corrispondenti funzioni f_{a_1} e f_{a_2} , i loro punti comuni soddisfano l'equazione $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$, cioè:

$$\frac{1}{\cos x} + a_1 \tan x = \frac{1}{\cos x} + a_2 \tan x \quad \rightarrow \quad (a_1 - a_2) \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad \tan x = 0 \quad \rightarrow \quad x = k\pi, \text{ con } k \in \mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono: $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

Vista l'arbitrarietà di a_1 e a_2 si può concludere che le curve $f_a(x) = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ hanno in comune infiniti punti di coordinate $(2k\pi; 1)$ e $((2k+1)\pi; -1)$.

b) La funzione $y = \frac{1 + a \sin x}{\cos x}$ ha campo di esistenza C.E.: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ e derivata prima:

$$y' = \frac{a \cos^2 x + \sin x(1 + a \sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x + a}{\cos^2 x}. \text{ La curva ha tangente orizzontale nei punti in cui la}$$

derivata prima si annulla, ossia per $\sin x = -a$. Condizione necessaria per l'esistenza di tali punti è quindi: $|a| < 1$. La loro ordinata si trova sostituendo $\sin x = -a$ nell'equazione della funzione e perciò

vale: $y = \frac{1 - a^2}{\pm \sqrt{1 - a^2}}$. Imponendo per ipotesi $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e tenendo conto che $|a| < 1$, risulta:

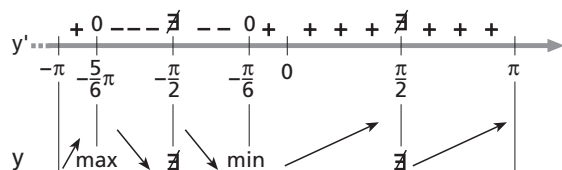
$$\frac{1 - a^2}{\sqrt{1 - a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad \sqrt{1 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \rightarrow \quad 1 - a^2 = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{2}.$$

Tali valori sono entrambi accettabili; pertanto le curve che hanno come tangente orizzontale la retta di

equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sono: $y = \frac{1 + \frac{1}{2} \sin x}{\cos x}$, cioè $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$, e $y = \frac{1 - \frac{1}{2} \sin x}{\cos x}$, ovvero $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$.

c) Considerata la funzione $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$, si applica la simmetria rispetto all'asse y : $\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$. La funzione trasformata è $Y = \frac{2 + \sin(-X)}{2 \cos(-X)}$ ovvero $Y = \frac{2 - \sin X}{2 \cos X}$. Essa coincide con la funzione $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ nello stesso sistema di assi cartesiani. Pertanto si conclude che le funzioni $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ e $y = \frac{2 - \sin x}{2 \cos x}$ sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ordinate.

Per rappresentare i loro grafici nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, è sufficiente compiere lo studio di una sola di esse, per esempio $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$. Il suo campo di esistenza è C.E.: $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Essa non è né pari né dispari. Non ha intersezioni con l'asse x poiché il numeratore della funzione, $2 + \sin x$, non si può mai annullare ed è sempre positivo; l'intersezione con l'asse y è $(0; 1)$. La funzione è positiva per $\cos x > 0$ cioè per $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$; è negativa per $-\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$. I limiti agli estremi del campo di esistenza sono: $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \frac{2 + \sin x}{2 \cos x} = -\infty$; pertanto la curva ha asintoti verticali $x = -\frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$. Nei punti $x = -\pi$ e $x = \pi$ il grafico ha coordinate $A(-\pi; -1)$ e $B(\pi; -1)$. La funzione derivata è $y' = \frac{2 \sin x + 1}{2 \cos^2 x}$. Essa si annulla nei punti $x = -\frac{5}{6}\pi$ e $x = -\frac{\pi}{6}$. Nella figura 3 è riportata la tabella del suo segno.



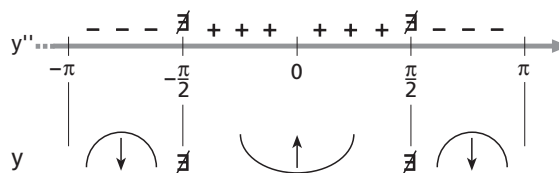
◀ Figura 3.

La funzione y ha un massimo nel punto $x = -\frac{5}{6}\pi$ e un minimo per $x = -\frac{\pi}{6}$. Le corrispondenti coordinate sul grafico valgono $M\left(-\frac{5}{6}\pi; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La derivata seconda della funzione è

$$y'' = \frac{\sin^2 x + \sin x + 1}{\cos^3 x}.$$

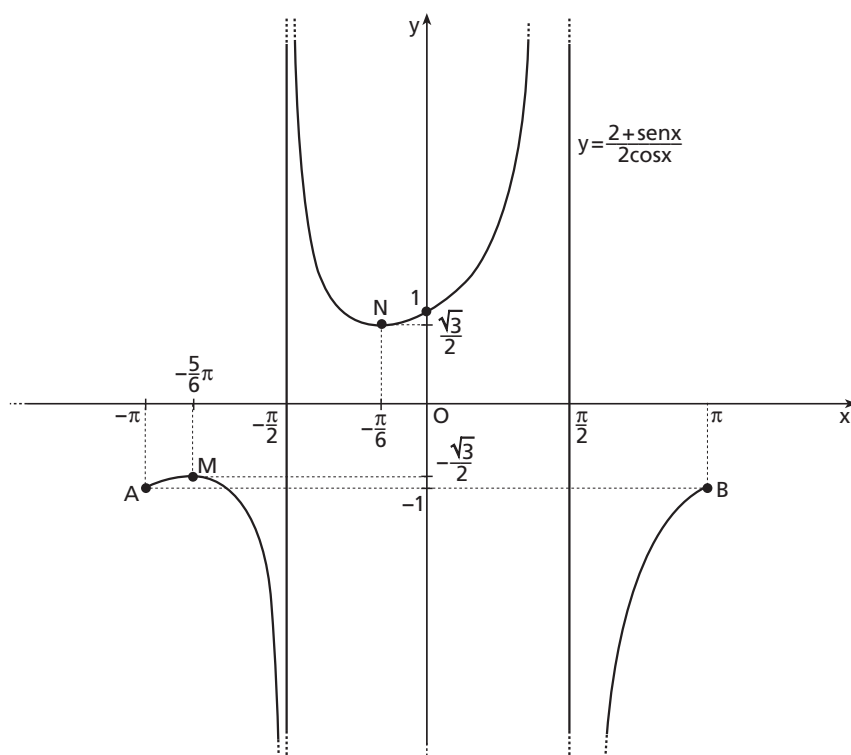
La tabella del suo segno è indicata nella figura 4.



► Figura 4.

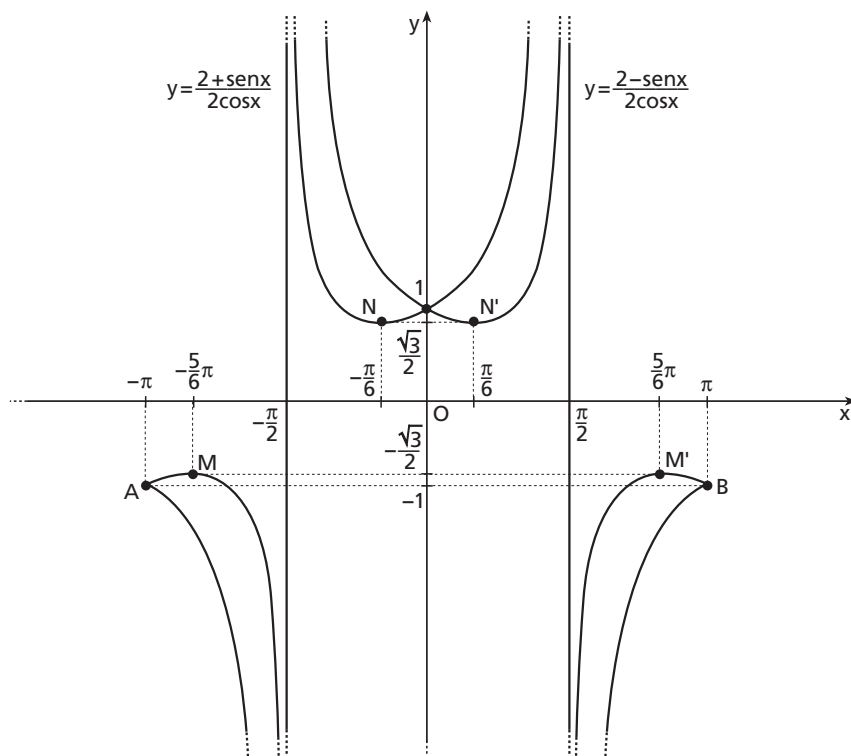
Si osserva che la derivata seconda non si annulla mai: non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di punti di flesso.

Il grafico della funzione $y = \frac{2 + \sin x}{2 \cos x}$ è rappresentato nella figura 5.



◀ Figura 5.

Sfruttando la proprietà di simmetria tra le funzioni $y = \frac{2 + \operatorname{sen} x}{2 \cos x}$ e $y = \frac{2 - \operatorname{sen} x}{2 \cos x}$ rispetto all'asse y , è quindi ora possibile tracciare il grafico della seconda funzione (figura 6).



◀ Figura 6.