

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva**

■ **PROBLEMA 2**

È assegnata la funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

- 1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
- 2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA .
- 3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G , quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
- 4) Calcolare il valore \bar{a} di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
- 5) Dopo aver controllato che il valore \bar{a} sopradetto è 4, indicare con $\bar{\gamma}$ e \bar{G} la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva \bar{G} divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

■ **PROBLEMA 2**

- 1) Una funzione $f(x)$ si definisce limitata nel suo insieme di definizione A se esiste un numero reale positivo M tale che $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$.

La funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che $1+x^2 \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$, si può scrivere $|f_a(x)| = \left| \frac{a}{1+x^2} \right| \leq |a|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

- 2) Si studia il grafico G della funzione $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$, con a positivo. Essa ha campo di esistenza \mathbb{R} ;

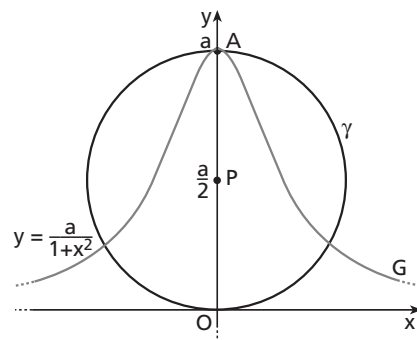
è simmetrica rispetto all'asse delle y ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale $y=0$, poiché

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$; ha derivata $f'_a(x) = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$, pertanto ha massimo assoluto nel punto $A(0; a)$; ha derivata seconda $f''_a(x) = \frac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$, dunque ha flessi nei punti $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La circonferenza di diametro OA ha centro nel punto $P(0; \frac{a}{2})$ e raggio uguale ad $\frac{a}{2}$. La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \rightarrow x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico G della funzione f_a per un generico a e il grafico γ della circonferenza.



▲ Figura 4.

- 3) Per determinare le intersezioni delle curve γ e G bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \frac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

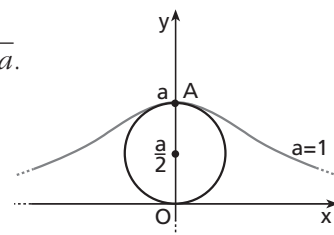
$$\begin{aligned} x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} &= 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \rightarrow x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Per la legge di annullamento del prodotto: $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$.
 Tenendo conto che a è positivo, le soluzioni sono: $x = 0 \vee x = \pm \sqrt{-1 + a}$.
 In particolare,

se $a > 1$, le curve si intersecano in tre punti: $(0; a)$, $(-\sqrt{a-1}; 1)$,
 $(\sqrt{a-1}; 1)$;

se $a \leq 1$, le curve hanno solo il punto $(0; 1)$ in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui $a > 1$, mentre la figura 5 rappresenta le due curve per $a = 1$.



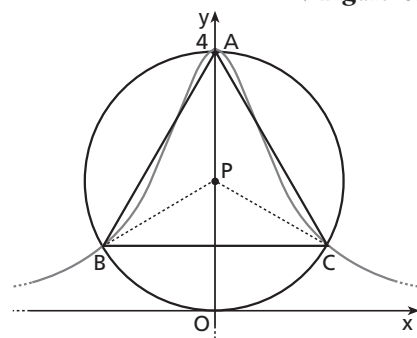
▲ Figura 5.

- 4) Indicati con A, B, C i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono: $A(0; a)$, $B(-\sqrt{a-1}; 1)$, $C(\sqrt{a-1}; 1)$, con $a > 1$.

Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo ABC sia equilatero, è sufficiente imporre $AC = BC$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{a-1})^2 + (1-a)^2} &= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a-1+1+a^2-2a} = \\ &= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a^2-a} = 2\sqrt{a-1}. \end{aligned}$$

Elevando al quadrato e semplificando per $(a-1)$ si ottiene $a = 4$.



▼ Figura 6.

- 5) Per $a = 4$, i punti A, B, C hanno coordinate $A(0; 4)$, $B(-\sqrt{3}; 1)$, $C(\sqrt{3}; 1)$. Osservando la figura 6, la curva \bar{G} divide il cerchio delimitato da $\bar{\gamma}$ in tre parti, di cui due uguali per simmetria. Per determinare l'area della regione mistilinea $ACOB$, è sufficiente calcolare l'area della superficie compresa tra la curva \bar{G} e il segmento BC e sommare a essa l'area del segmento circolare OBC . Mentre il primo addendo si determina con un calcolo integrale, l'area del segmento circolare si trova per differenza tra il settore circolare $BPCO$ di angolo $B\hat{P}C = 120^\circ$ e il triangolo PBC . Pertanto risulta:

$$\begin{aligned} S_{ACOB} &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{1+x^2} - 1 \right) dx + \left[\frac{120}{360} \pi (2)^2 - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3}(2-1) \right] = \\ &= [4 \arctg x - x]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} = \frac{8}{3} \pi - 2\sqrt{3} + \frac{4}{3} \pi - \sqrt{3} = 4\pi - 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

L'area S di ciascuna delle due restanti regioni, tra loro congruenti, comprese tra la curva \bar{G} e gli archi inferiori AB e AC , si ottiene come metà della differenza tra l'area della circonferenza $\bar{\gamma}$ e l'area S_{ACOB} :

$$S = \frac{\pi(2)^2 - (4\pi - 3\sqrt{3})}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{3}.$$