

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO DI ORDINAMENTO • 2009**

■ **PROBLEMA 1**

È assegnato il settore circolare  $\widehat{AOB}$  di raggio  $r$  e ampiezza  $x$  ( $r$  e  $x$  sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

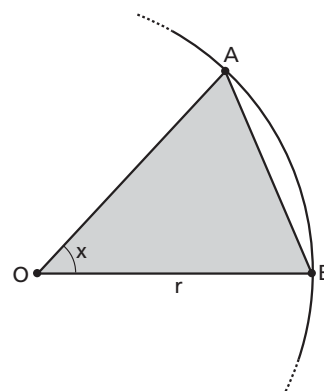
1. Si provi che l'area  $S$  compresa fra l'arco e la corda  $AB$  è espressa, in funzione di  $x$ , da

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Si studi come varia  $S(x)$  e se ne disegni il grafico (avendo posto  $r = 1$ ).

3. Si fissi l'area del settore  $\widehat{AOB}$  pari a  $100 \text{ m}^2$ . Si trovi il valore di  $r$  per il quale è minimo il perimetro di  $\widehat{AOB}$  e si esprima il corrispondente valore di  $x$  in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

4. Sia  $r = 2$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ . Il settore  $\widehat{AOB}$  è la base di un solido  $W$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a  $OB$  sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di  $W$ .



► **Figura 1.**

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

### PROBLEMA 1

1. Indichiamo con:

$S(\widehat{AOB})$  l'area del settore circolare  $\widehat{AOB}$  di raggio  $r$  e ampiezza  $x$ ,

$S(AOB)$  l'area del triangolo isoscele  $AOB$ ,

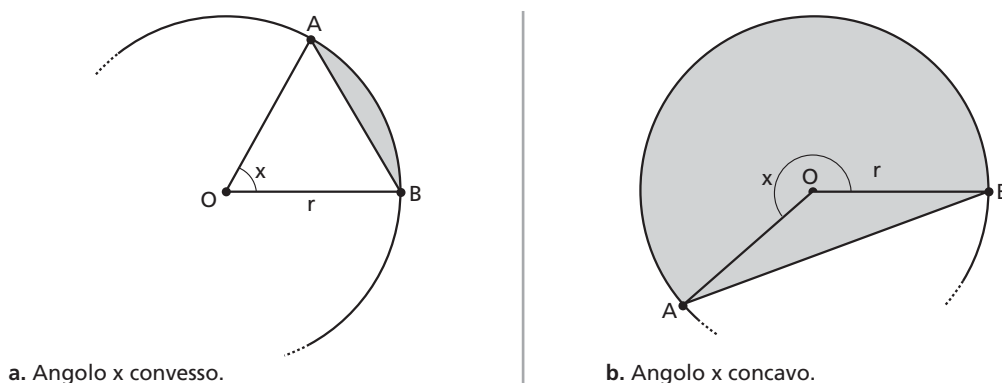
$S(x)$  la superficie compresa fra l'arco e la corda  $AB$ .

Differenziamo i casi in cui l'angolo  $x$  del settore circolare è convesso o concavo (figura 3):

a) se  $x$  è convesso ( $0 \leq x < \pi$ ) risulta  $S(x) = S(\widehat{AOB}) - S(AOB)$ ;

b) se  $x$  è concavo ( $\pi \leq x \leq 2\pi$ ) risulta  $S(x) = S(\widehat{AOB}) + S(AOB)$ .

▼ Figura 3.



L'area del settore circolare di raggio  $r$  e ampiezza  $x$  è  $S(\widehat{AOB}) = \frac{r^2 x}{2}$ , mentre l'area del triangolo  $AOB$ , conoscendo due lati e l'angolo compreso, è per la trigonometria:

$$S(AOB) = \begin{cases} \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \frac{r^2 \sin(2\pi - x)}{2} = -\frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

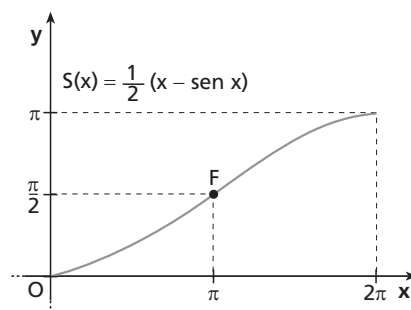
Quindi la superficie  $S(x)$  diventa:

$$S(x) = \begin{cases} S(\widehat{AOB}) - S(AOB) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ S(\widehat{AOB}) + S(AOB) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow S(x) = \begin{cases} \frac{r^2 x}{2} - \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \frac{r^2 x}{2} - \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$S(x) = \frac{r^2 x - r^2 \sin x}{2} = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Ponendo  $r = 1$ , diventa  $S(x) = \frac{1}{2} (x - \sin x)$ . Tale funzione è continua nell'intervallo di definizione  $[0; 2\pi]$ ; agli estremi del dominio risulta  $S(0) = 0$ ,  $S(2\pi) = \pi$ ; la sua derivata prima ha espressione:  $S'(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos x)$ . Pertanto risulta  $S'(x) > 0$  per  $0 < x < 2\pi$  e  $S'(0) = S'(2\pi) = 0$ : la funzione è non decrescente e ha tangente orizzontale negli estremi dell'intervallo.

La derivata seconda vale  $S''(x) = \frac{1}{2} \sin x$ : è positiva per  $0 < x < \pi$ , negativa per  $\pi < x < 2\pi$ , nulla per  $x = 0$ ,  $x = \pi$ ,  $x = 2\pi$ ; la curva ha pertanto un flesso  $F\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ . Nella figura 4 è rappresentato il grafico della funzione  $S(x)$ .



► Figura 4.

3. Posta l'area del settore circolare  $S(\widehat{AOB}) = \frac{r^2 x}{2}$  uguale a  $100 \text{ m}^2$ , diventa  $\frac{r^2 x}{2} = 100$ , quindi  $r = \sqrt{\frac{200}{x}}$  con  $x \in ]0; 2\pi]$ ; risulta allora che, al variare di  $x$  nell'intervallo, la variabile  $r$  è inferiormente limitata ovvero  $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$ .

Calcoliamo il perimetro  $P$  del settore  $\widehat{AOB}$  in funzione del raggio  $r$ , considerando che si può scrivere l'angolo  $x$  in funzione del raggio  $r$  ovvero  $x = \frac{200}{r^2}$ :

$$P = r + r + rx \rightarrow P(r) = 2r + r \frac{200}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}.$$

Determiniamo la derivata prima di tale funzione e studiamone il segno:

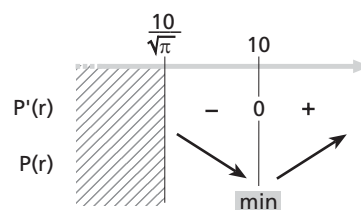
$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}; P'(r) > 0 \rightarrow r^2 > 100 \rightarrow r > 10.$$

In figura 5 è riportato il quadro dei segni.

La funzione ha un minimo per  $r = 10 \text{ m}$ ; in tal caso l'angolo corrispondente misura:

$$x = \frac{200}{10^2} = 2 \text{ rad} \approx 57,3^\circ \approx 115^\circ.$$

▼ Figura 5.



4. Posto  $r = 2$  e  $x = \frac{\pi}{3}$ , fissiamo un sistema di riferimento ortogonale  $Oxy$  contenente il settore in modo che  $O$  coincida con l'origine; risulta allora che  $B$  ha coordinate  $(2; 0)$  e  $A(1; \sqrt{3})$  (figura 6).

La retta  $OA$  ha equazione  $f(x) = \sqrt{3}x$  mentre l'arco  $AB$  è il grafico della funzione  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ , per  $x \in [1; 2]$ .

Poiché il solido  $W$  ha come base il settore circolare e ha sezioni ortogonali a  $OB$  quadrate, si ottiene il suo volume  $V$  secondo la seguente formula:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [g(x)]^2 dx = \\ &= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[ 4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 1 + \left( 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

▼ Figura 6.

