ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2013

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita, per tutti gli x positivi, da $f(x) = x^3 \ln x$.

1. Si studi f e se ne disegni il grafico γ su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali e monometrici Oxy; accertato che γ presenta sia un punto di flesso che un punto di minimo se ne calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ascisse arrotondate alla terza cifra decimale.
2. Sia P il punto in cui γ interseca l'asse x. Si trovi l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse y, passante per l'origine e tangente a γ in P.
3. Sia R la regione delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto a sinistra $]0; 1]$. Si calcoli l'area di R, illustrando il ragionamento seguito e la si esprima in mm^2 avendo supposto l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro.
4. Si disegni la curva simmetrica di γ rispetto all'asse delle y e se ne scriva altresì l'equazione. Similmente si faccia per la curva simmetrica di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.

PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 \ln x$:

- il dominio è $]0; +\infty[$;
- vista la natura del dominio, la funzione non è né pari né dispari;
- poiché $x > 0$, il grafico non interseca l'asse y; per le intersezioni con l'asse x valutiamo le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 \ln x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \quad \text{non accettabile} \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ \ln x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow P(1; 0);$$

- studiamo il segno della funzione tenendo conto del suo dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^3 \ln x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > 1 \end{cases} \rightarrow x > 1,$$

  pertanto la funzione è positiva per $x > 1$ ed è negativa per $0 < x < 1$;
- studiamo l'esistenza di eventuali asintoti valutando i limiti agli estremi del dominio:

  a) $\lim_{x \to 0^+} x^3 \ln x$

  si tratta di una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-3 \cdot \frac{1}{x^4}} = \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^3}{3} = 0,$$

  il punto $(0; 0)$ è un punto di discontinuità della funzione;

  b) $\lim_{x \to +\infty} x^3 \ln x = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \ln x}{x} = +\infty,$

  pertanto non esistono asintoti orizzontali e obliqui;
- determiniamo la derivata prima della funzione e studiamone il segno, tenendo conto del suo dominio:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1),$$

  pertanto:

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2(3 \ln x + 1) > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 \ln x + 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x > -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > e^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \rightarrow x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}},$$

quindi:

– $f'(x) > 0$ per $x > \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\rightarrow$ $f(x)$ è crescente;

– $f'(x)=0$ per $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\quad\rightarrow f(x)$ ha un punto stazionario;

– $f'(x)<0$ per $0<x<\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ $\quad\rightarrow f(x)$ è decrescente;

la funzione ha quindi un minimo relativo per $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\simeq 0{,}717$ e il corrispondente punto M sul grafico ha coordinate:

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}} \\ y_M=x_M^3\ln x_M \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_M=\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}\simeq 0{,}717 \\ y_M=-\dfrac{1}{3e}\simeq -0{,}123 \end{cases};$$

- valutiamo il comportamento della derivata prima nell'intorno destro di 0:

  $$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2(3\ln x+1)$$

  si tratta di una forma indeterminata del tipo $0\cdot\infty$, eliminabile applicando De L'Hôpital:

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{3\ln x+1}{\dfrac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{3}{x}}{-2\cdot\dfrac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{3x^2}{2}=0,$$

  la derivata destra del punto $x=0$ è quindi nulla;

- studiamo la concavità del grafico della funzione studiando il segno della derivata seconda, tenendo conto del dominio della funzione:

  $$f''(x)=2x(3\ln x+1)+x^2\cdot\frac{3}{x}=6x\ln x+5x=x(6\ln x+5),$$

  pertanto:

  $$\begin{cases} x>0 \\ f''(x)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x(6\ln x+5)>0 \end{cases} \rightarrow 6\ln x+5>0 \rightarrow \ln x>-\frac{5}{6} \rightarrow x>\frac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$$

  quindi:

  – $f''(x)>0$ per $x>\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\rightarrow f(x)$ ha concavità rivolta verso l'alto;

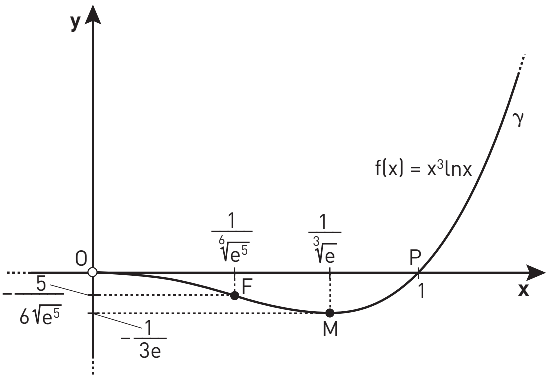
  – $f''(x)=0$ per $x=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\rightarrow f(x)$ ha un punto di flesso;

  – $f''(x)<0$ per $0<x<\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}$ $\rightarrow f(x)$ ha concavità rivolta verso il basso;

  la funzione ha un flesso per $x=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\simeq 0{,}435$ e il corrispondente punto F sul grafico ha coordinate:

  $$\begin{cases} x_F=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}} \\ y_F=x_F^3\ln x_F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_F=\dfrac{1}{\sqrt[6]{e^5}}\simeq 0{,}435 \\ y_F=-\dfrac{5}{6\sqrt{e^5}}\simeq -0{,}068 \end{cases}$$

In figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x) = x^3 \ln x$.



▲ **Figura 4.**

2. Una parabola con asse parallelo all'asse y e passante per l'origine ha equazione $y = ax^2 + bx$. Imponiamo il passaggio per $P(1; 0)$:

$$0 = a + b \quad \rightarrow \quad b = -a.$$

L'equazione della parabola diventa:

$$y = ax^2 - ax$$

Se la conica è tangente a γ in P le derivate delle funzioni corrispondenti devono essere uguali per $x = 1$:

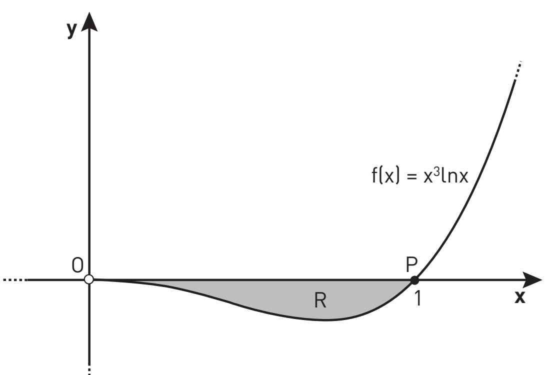
$$y' = 2ax - a \quad \rightarrow \quad y'(1) = 2a - a = a$$

$$f'(x) = x^2(3\ln x + 1) \quad \rightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Pertanto $a = 1$ e la parabola cercata ha equazione $y = x^2 - x$.

3. Poiché la funzione $f(x)$ è non positiva nell'intervallo $]0; 1]$ (figura 5), l'area della regione R delimitata da γ e dall'asse x sull'intervallo aperto si calcola tramite il seguente integrale definito improprio:

$$\mathscr{A}(R) = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 -f(t)dt = -\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^3 \ln t dt.$$



▲ **Figura 5.**

Per semplicità risolviamo l'integrale indefinito $\int t^3 \ln t\, dt$ mediante l'integrazione per parti:

$$\int t^3 \ln t\, dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \int \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{t}\, dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \int \frac{t^3}{4}\, dt = \frac{t^4}{4} \ln t - \frac{t^4}{16} + c.$$

Pertanto $\mathcal{A}(R)$ risulta:

$$\mathcal{A}(R) = -\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 t^3 \ln t\, dt = -\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{t^4}{4}\ln t - \frac{t^4}{16}\right]_x^1 = -\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{1}{16} - \frac{x^4}{4}\ln x + \frac{x^4}{16}\right).$$

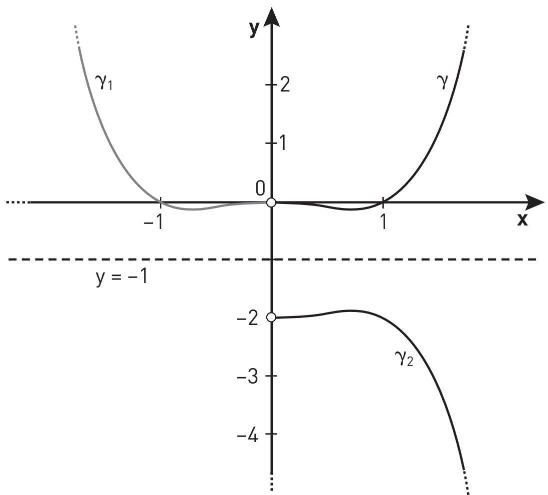
Poiché la forma indeterminata del limite $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{4}\ln x$ è eliminabile con il teorema di De L'Hôpital e vale $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4}{4}\ln x = 0$, allora:

$$\mathcal{A}(R) = -\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{16}.$$

Supposta l'unità di misura lineare pari a 1 decimetro, risulta:

$$\mathcal{A}(R) = \frac{1}{16}\ \mathrm{dm}^2 = 0{,}0625\ \mathrm{dm}^2 = 625\ \mathrm{mm}^2.$$

4. Nella figura 6 sono rappresentati i grafici γ_1 e γ_2, rispettivamente γ_1 simmetrico di γ rispetto all'asse delle y e γ_2 simmetrico di γ rispetto alla retta di equazione $y = -1$.



▲ **Figura 6.**

Determiniamo l'equazione della curva γ_1 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto all'asse y:

$$\begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \quad\to\quad y' = -x'^3 \ln(-x') \quad\to\quad \gamma_1\colon y = -x^3\ln(-x),\ x<0.$$

Ricaviamo l'equazione della curva γ_2 applicando alla funzione $y = x^3 \ln x$ le equazioni della simmetria rispetto alla retta $y = -1$:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -2-y \end{cases} \quad\to\quad \begin{cases} x = x' \\ y = -2-y' \end{cases} \quad\to\quad -2-y' = x'^3\ln x' \quad\to\quad \gamma_2\colon y = -x^3\ln x - 2,\ x>0.$$