

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali da

$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

1. Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
4. La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2012

PROBLEMA 1

1. La funzione goniometrica $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ ammette periodo P se risulta $g(x+P) = g(x)$, quindi:

$$\sin\left[\frac{3}{2}\pi(x+P)\right] = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \rightarrow \sin\left(\frac{3}{2}\pi x + \frac{3}{2}\pi P\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Tenendo conto che il periodo della funzione seno è 2π , ne consegue che:

$$\frac{3}{2}\pi P = 2\pi \rightarrow P = \frac{4}{3}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = |27x^3|$, scrivendola in questo modo:

$$f(x) = \begin{cases} 27x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ -27x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Essa ha dominio \mathbb{R} ed è continua e derivabile in tutto il dominio; poiché $f(-x) = f(x)$, la funzione è pari, pertanto il suo grafico G_f è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; interseca gli assi nel punto $O(0; 0)$; è non negativa nel proprio dominio.

Ricaviamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = \begin{cases} 81x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -81x^2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Risulta allora che $f'(x) > 0$ per $x > 0$, $f'(x) = 0$ per $x = 0$, $f'(x) < 0$ per $x < 0$: la funzione f ha pertanto minimo assoluto nel punto $x = 0$.

Studiamo la derivata seconda e il suo segno:

$$f''(x) = \begin{cases} 162x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -162x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

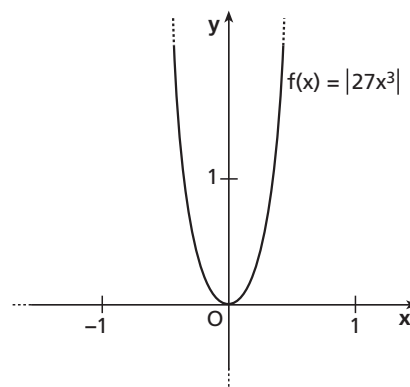
Ne segue che $f''(x) > 0$ per $x \neq 0$ e il corrispondente grafico ha nel dominio concavità rivolta verso l'alto.

Nella figura 2 è rappresentato il grafico G_f di $f(x)$.

Analizziamo ora la funzione goniometrica $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$ di periodo $\frac{4}{3}$. Si tratta di una contrazione orizzontale della funzione seno, del tipo $y = \sin\left(\frac{x}{m}\right)$, con $m = \frac{2}{3\pi}$.

Ricordando che la funzione seno, $y = \sin x$, si annulla nei punti $x = k\pi$, ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, ha minimi assoluti nei punti $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, si deduce che la funzione $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$, per $k \in \mathbb{Z}$:

- si annulla nei punti $x = \frac{2}{3}k$,
- ha massimi assoluti nei punti $x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$,



▲ Figura 2.

- ha minimi assoluti nei punti $x = 1 + \frac{4}{3}k$.

Nella figura 3 è rappresentato il grafico di $y = \sin x$ e della sua contrazione orizzontale

$$g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

2. Data una funzione generica $y = b(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di b nel punto $(x_0; y_0)$, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y , è:

$$y - y_0 = b'(x_0)(x - x_0).$$

Determiniamo l'equazione della retta r tangente alla funzione $f(x) = |27x^3|$ nel punto $x = \frac{1}{3}$, tenendo conto che $f\left(\frac{1}{3}\right) = 1$ e $f'\left(\frac{1}{3}\right) = 81\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 9$:

$$y - 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) \rightarrow y = 9x - 2.$$

Tale retta ha coefficiente angolare $m_r = 9$.

Consideriamo la funzione $g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$: è noto dal punto 1 del problema che nel punto $x = \frac{1}{3}$ la funzione è dotata di massimo la cui ordinata vale 1; pertanto in tale punto la corrispondente tangente s è orizzontale, ha equazione $y = 1$ e coefficiente angolare $m_s = 0$.

Determiniamo la tangente goniometrica dell'angolo γ formato dalle rette r e s :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s} \rightarrow \operatorname{tg} \gamma = 9.$$

Ricaviamo il corrispondente angolo in gradi sessagesimali:

$$\gamma = \arctg 9 = 83,6598...^\circ \approx 83^\circ 40'.$$

3. Rappresentiamo in uno stesso piano cartesiano i grafici G_f e G_g ed evidenziamo la regione R delimitata dalle due curve (figura 4).

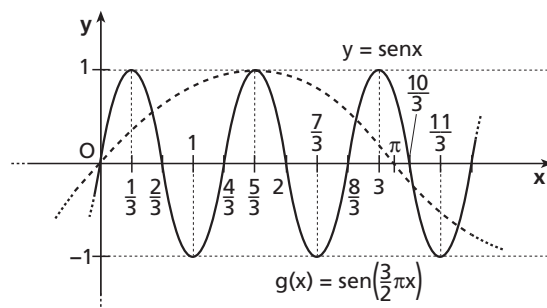
Ricaviamo l'ascissa del punto Q , intersezione dei grafici risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = |27x^3| \\ y = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = |27x^3| \\ |27x^3| = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \end{cases}$$

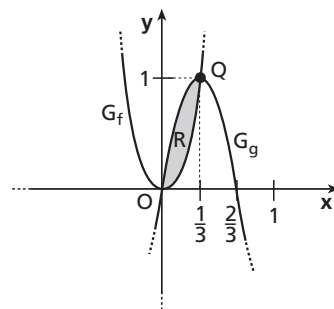
La seconda equazione del sistema non è risolvibile algebricamente ma dallo studio dei grafici sappiamo che la soluzione è unica per $x > 0$. Ugualmente è noto dal punto 2 del problema che il punto $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ è comune a entrambi i grafici. Per unicità si deduce che $x_Q = \frac{1}{3}$.

Calcoliamo l'area della regione R tramite il seguente integrale:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(R) &= \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 27x^3 \right] dx = \left[-\frac{2}{3\pi} \cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - \frac{27}{4}x^4 \right]_0^{\frac{1}{3}} = \\ &= -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{81} + \frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12}. \end{aligned}$$



▲ Figura 3.



▲ Figura 4.

4. Rappresentiamo in figura 5 il solido S generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse x :

Osserviamo che il volume del solido S si ottiene dalla differenza tra due volumi:

- il volume V_g del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $g(x)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse;
- il volume V_f del solido generato dalla rotazione intorno all'asse x della parte di piano delimitata dalla funzione $f(x)$, dalla retta $x = \frac{1}{3}$ e dall'asse positivo delle ascisse.

Risulta allora:

$$\begin{aligned} V(S) &= V_g - V_f = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) dx - \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (27x^3)^2 dx = \\ &= \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \left[\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6 \right] dx. \end{aligned}$$

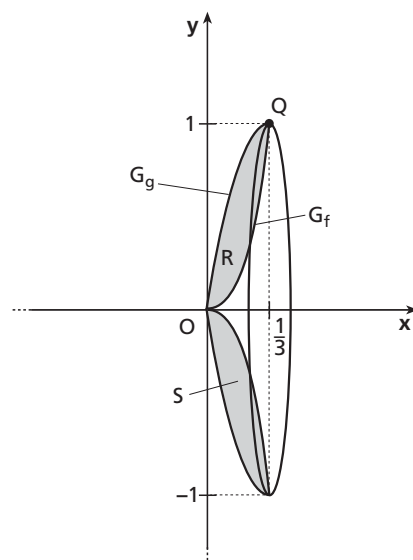
Rappresentiamo in figura 6 il solido T generato dalla rotazione della regione R intorno all'asse y .

Osserviamo che il volume del solido T si ottiene dalla differenza tra due volumi:

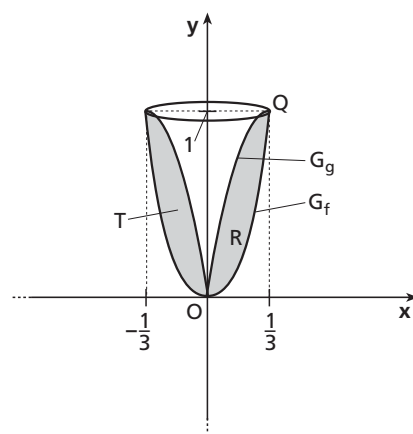
- il volume $V_{f^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{y}$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate;
- il volume $V_{g^{-1}}$ del solido generato dalla rotazione intorno all'asse y della parte di piano delimitata dalla funzione $g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi} \arcsen y$, dalla retta $y = 1$ e dall'asse positivo delle ordinate.

Risulta quindi:

$$V(T) = V_{f^{-1}} - V_{g^{-1}} = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \sqrt[3]{y} \right)^2 dy - \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{3\pi} \arcsen y \right)^2 dy = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{9} \sqrt[3]{y^2} - \frac{4}{9\pi^2} \arcsen^2 y \right) dy.$$



▲ Figura 5.



▲ Figura 6.