

■ **PROBLEMA 2**

Si consideri la funzione  $f$  definita sull'intervallo  $[0; +\infty[$  da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e sia  $C$  la sua curva rappresentativa nel riferimento  $Oxy$ , ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se  $f$  è *continua* e *derivabile* in 0
2. Si dimostri che l'equazione  $f(x) = 0$  ha, sull'intervallo  $[0; +\infty[$ , un'unica radice reale.
3. Si disegni  $C$  e si determini l'equazione della retta  $r$  tangente a  $C$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
4. Sia  $n$  un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di  $n$ , l'area  $A_n$  del dominio piano delimitato dalla curva  $C$ , dalla retta tangente  $r$  e dalle due rette:  $x = \frac{1}{n}$  e  $x = 1$ .
5. Si calcoli il limite per  $n \rightarrow +\infty$  di  $A_n$  e si interpreti il risultato ottenuto.

**PROBLEMA 2**

1. Una funzione è continua in un punto  $x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . In questo caso, poiché la funzione ha come campo di esistenza  $x \geq 0$ , esaminiamo la continuità a destra di 0. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 = 1 = f(0).$$

Infatti per il teorema di De L'Hopital si ha  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \log x = 0$ . La funzione è continua in 0.

Una funzione è derivabile in un punto  $x_0$  se esiste ed è finito

$$\lim_{b \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + b) - f(x_0)}{b}.$$

In questo caso:

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} b^2 (3 - 2 \log b) + 1 - 1}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} b (3 - 2 \log b) = 0$$

quindi la funzione è derivabile in 0.

2.  $Df(x) = \frac{1}{2} (2x(3 - 2 \log x) - \frac{2}{x} x^2) = 2x(1 - \log x)$ , quindi la funzione è crescente quando  $\log x < 1$ , cioè in  $]0; e[$ , mentre è decrescente in  $]e; +\infty[$ . In  $x = e$  c'è un punto di massimo:  $f(e) = \frac{1}{2} e^2 + 1 > 0$ .

Inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = [+\infty \cdot (-\infty)] = -\infty$ . In  $]1; +\infty[$ , quindi, la funzione deve attraversare l'asse  $x$  per il teorema di esistenza degli zeri. Inoltre, essendo la funzione decrescente in tale intervallo, il punto di intersezione tra la funzione e l'asse  $x$  è unico.

Per stimare il valore della soluzione si può procedere, per esempio, con il metodo di bisezione. Notiamo innanzitutto che  $f(4) \approx 2,82 > 0$ , mentre  $f(5) \approx -1,74 < 0$ .

$a$	$f(a)$	$b$	$f(b)$	$(a+b)/2$	$f[(a+b)/2]$
4	2,82	5	-1,74	4,5	0,92
4,5	0,92	5	-1,74	4,75	-0,31
4,5	0,92	4,75	-0,31	4,625	0,33

E così via fino alla precisione voluta (la soluzione è circa 4,6901).

3. Per disegnare  $C$ , oltre ad utilizzare gli elementi studiati nel punto 2, calcoliamo

$f''(x) = 2 \left[ 1 - \log x + x \left( -\frac{1}{x} \right) \right] = -2 \log x$ . La concavità è rivolta verso l'alto quando  $-2 \log x > 0$ , cioè quando  $x < 1$ , mentre è rivolta verso l'alto per  $x > 1$ . In  $x = 1$  c'è un punto di flesso obliquo ( $f'(1) = 2$ ). La generica retta tangente alla curva  $f(x)$  in un punto  $x_0$  è  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ . Sostituendo  $x_0 = 1$  si ottiene  $y - \frac{5}{2} = 2(x - 1)$  quindi  $y = 2x + \frac{1}{2}$  (tangente inflessionale).

Rappresentiamo il grafico di  $C$  (figura 3)

4. L'area  $A_n$  richiesta è data dal seguente integrale

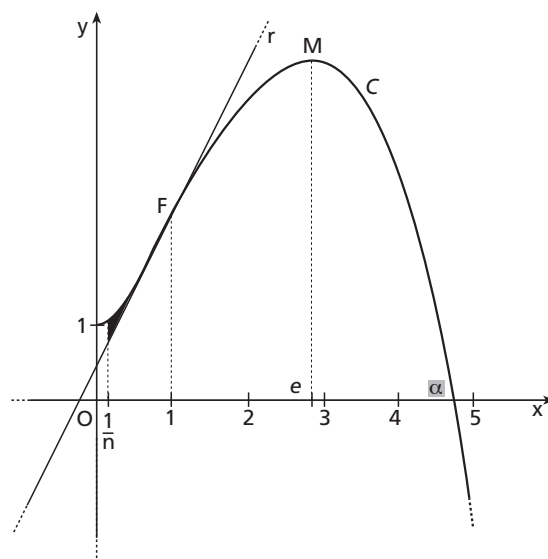
$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ f(x) - \left( 2x + \frac{1}{2} \right) \right] dx &= \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 - 2x - \frac{1}{2} \right] dx. \\ &= \int \left[ \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + 1 - 2x - \frac{1}{2} \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x - \int x^2 \log x \, dx = \\ &= (\text{integrando per parti}) \\ &\frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} \log x + \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} \log x + \frac{x^3}{9} + c = \\ &= \frac{11}{18} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} \log x + c. \end{aligned}$$

$$\text{L'area richiesta è } A_n = \left[ \frac{11}{18} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{x^3}{3} \log x \right]_{\frac{1}{n}}^1 = \frac{1}{9} - \frac{11}{18} \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{3} \frac{1}{n^3} \log n$$

5. Calcoliamo  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ . Si ha:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \frac{1}{9}$  perché il secondo, il terzo e il quarto termine nel limite sono della forma  $\left[ \frac{a}{+\infty} \right]$ , mentre l'ultimo tende a 0 per la regola del confronto tra infiniti. Visto che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , il risultato ottenuto rappresenta

$$\int_0^1 \left[ \frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \log x) + \frac{1}{2} - 2x \right] dx,$$

che geometricamente si può interpretare come l'area compresa tra la curva e la retta  $r$  tra 0 e 1.



▲ Figura 3.