

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005  
Sessione suppletiva**

■ **PROBLEMA 2**

È assegnata la funzione  $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ , dove  $a$  è un parametro reale non nullo.

- 1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione  $f_a(x)$  è limitata.
- 2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali ( $Oxy$ ) e indicato con  $A$  il punto di massimo del grafico  $G$  della funzione quando  $a > 0$ , scrivere l'equazione della circonferenza  $\gamma$  di diametro  $OA$ .
- 3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza  $\gamma$  e la curva  $G$ , quando  $a$  varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
- 4) Calcolare il valore  $\bar{a}$  di  $a$  per il quale la circonferenza  $\gamma$  e la curva  $G$  hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
- 5) Verificare che esiste un valore  $a'$  di  $a$  per il quale la funzione  $f_{a'}(x)$  si può considerare la densità di probabilità di una variabile aleatoria continua e determinare la funzione di distribuzione di tale variabile.

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione suppletiva**

**PROBLEMA 2**

- 1) Una funzione  $f(x)$  si definisce limitata nel suo insieme di definizione  $A$  se esiste un numero reale positivo  $M$  tale che  $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in A$ .

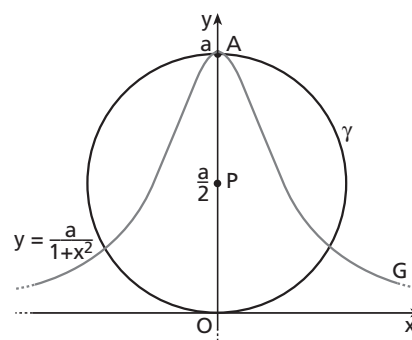
La funzione  $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$  ha come campo di esistenza l'insieme dei numeri reali. Osservando che  $1+x^2 \geq 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , si può scrivere  $|f_a(x)| = \left| \frac{a}{1+x^2} \right| \leq |a|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Pertanto la funzione è limitata nel campo reale.

- 2) Si studia il grafico  $G$  della funzione  $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$ , con  $a$  positivo. Essa ha campo di esistenza reale; è simmetrica rispetto all'asse delle  $y$  ed è sempre positiva; ha asintoto orizzontale  $y=0$ , poiché  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{1+x^2} = 0$ ; ha derivata  $f'_a(x) = \frac{-2ax}{(1+x^2)^2}$ , pertanto ha massimo assoluto nel punto  $A(0; a)$ ; ha derivata seconda  $f''_a(x) = \frac{-2a(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$ , dunque ha flessi nei punti  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

La circonferenza di diametro  $OA$  ha centro nel punto  $P\left(0; \frac{a}{2}\right)$  e raggio uguale ad  $\frac{a}{2}$ . La sua equazione è:

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - ay = 0.$$

Nella figura 4 è rappresentato il grafico  $G$  della funzione  $f_a$  per un generico  $a$  e il grafico  $\gamma$  della circonferenza.



▲ Figura 4.

- 3) Per determinare le intersezioni delle curve  $\gamma$  e  $G$  bisogna risolvere il sistema delle loro equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - ay = 0 \\ y = \frac{a}{1+x^2} \end{cases}.$$

L'equazione risolvente è:

$$x^2 + \frac{a^2}{(1+x^2)^2} - \frac{a^2}{1+x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(1+x^2)^2 + a^2 - a^2(1+x^2) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2(1+x^2)^2 - a^2x^2 = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad x^2(x^4 + 2x^2 - a^2 + 1) = 0.$$

Per la legge di annullamento del prodotto:  $x^2 = 0 \vee x^2 = -1 \pm a$ .

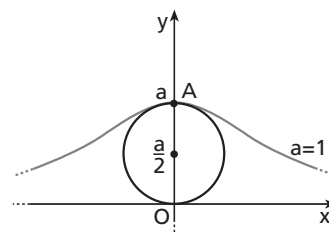
Tenendo conto che  $a$  è positivo, le soluzioni sono:  $x = 0 \vee x = \pm \sqrt{-1 \pm a}$ .

In particolare:

se  $a > 1$ , le curve si intersecano in tre punti:  $(0; a)$ ,  $(-\sqrt{a-1}; 1)$ ,  $(\sqrt{a-1}; 1)$ ;

se  $a \leq 1$ , le curve hanno solo il punto  $(0; 1)$  in comune.

La figura 4 mostra dunque il caso in cui  $a > 1$ , mentre la figura 5 rappresenta le due curve per  $a = 1$ .



▲ Figura 5.

- 4) Indicati con  $A, B, C$  i punti di intersezione delle due curve (figura 6), le loro coordinate sono:  $A(0; a)$ ,  $B(-\sqrt{a-1}; 1)$ ,  $C(\sqrt{a-1}; 1)$ , con  $a > 1$ .

Sfruttando la simmetria della figura, affinché il triangolo  $ABC$  sia equilatero, è sufficiente imporre  $AC = BC$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\sqrt{a-1})^2 + (1-a)^2} &= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a-1 + 1 + a^2 - 2a} = \\ &= 2\sqrt{a-1} \rightarrow \sqrt{a^2 - a} = 2\sqrt{a-1}.\end{aligned}$$

Elevando al quadrato e semplificando per  $(a-1)$  si ottiene  $a = 4$ .

- 5) La funzione  $f_a(x) = \frac{a}{1+x^2}$  è continua e positiva in tutto il campo reale per  $a > 0$ . Affinché essa sia una funzione densità di probabilità deve valere:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x) dx = 1$ .

Pertanto si calcola il seguente integrale:

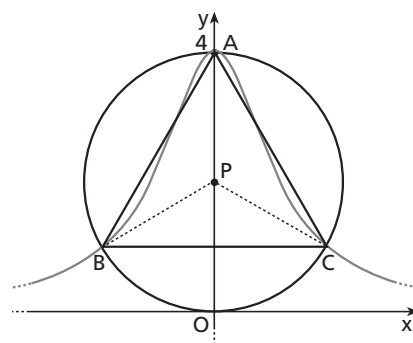
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = a \left( \lim_{z \rightarrow +\infty} \arctg z - \lim_{z \rightarrow -\infty} \arctg z \right) = a \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a\pi,$$

e si pone uguale a 1, cioè  $a\pi = 1 \rightarrow a = \frac{1}{\pi}$ .

Il valore  $a'$  per cui la funzione è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua  $X$ , è  $a' = \frac{1}{\pi}$ . La densità ha quindi equazione:  $f_{\frac{1}{\pi}}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

La funzione di distribuzione (o di ripartizione)  $F(x)$  di una variabile aleatoria continua  $X$  è definita come  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ . Essa fornisce la probabilità che la variabile  $X$  non superi un determinato valore  $x$  ed è primitiva della funzione densità di probabilità  $f(x)$ . Nel caso specifico ha espressione:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} [\arctg x - \lim_{z \rightarrow -\infty} \arctg z] = \frac{1}{\pi} \left[ \arctg x + \frac{\pi}{2} \right] = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}.$$



▲ Figura 6.