

## ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

### PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni  $f$  e  $g$  definite, per tutti gli  $x$  reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano  $Oxy$ , si studino  $f$  e  $g$  e se ne disegnano i rispettivi grafici  $G_f$  e  $G_g$ .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di  $G_f$  con la retta  $y = -3$ . Successivamente, si considerino i punti di  $G_g$  a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo  $[-6; 6]$  e se ne indichino le coordinate.
3. Sia  $R$  la regione del piano delimitata da  $G_f$  e  $G_g$  sull'intervallo  $[0; 2]$ . Si calcoli l'area di  $R$ .
4. La regione  $R$  rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di  $R$  a distanza  $x$  dall'asse  $y$  la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da  $h(x) = 3 - x$ . Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

### PROBLEMA 1

1. Studiamo la funzione  $f(x) = x^3 - 4x$ . Essa è polinomiale e ha dominio  $\mathbb{R}$ ;  $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$ , pertanto la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine; tenendo conto che  $f(x) = x(x^2 - 4)$  essa interseca gli assi cartesiani nei punti  $(0; 0)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(-2; 0)$ . Valutiamo il segno della funzione ponendo  $x(x^2 - 4) > 0$ :

$$x > 0, \\ x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 2.$$

Dal quadro dei segni (figura 2) si deduce:

$$f(x) > 0 \quad \text{per } -2 < x < 0 \vee x > 2, \\ f(x) < 0 \quad \text{per } x < -2 \vee 0 < x < 2.$$

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 4x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^3 - 4x)}{x} = +\infty,$$

pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.

Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = 3x^2 - 4,$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 3x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) < 0 \rightarrow 3x^2 - 4 < 0 \rightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 3) si trova che la funzione ha un massimo per

$x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$  e un minimo per  $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}, \quad f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{16\sqrt{3}}{9},$$

gli estremi relativi della funzione sono quindi:

$$M_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), M_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right).$$

Calcoliamo infine la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

Essa si annulla per  $x = 0$ , è positiva per  $x > 0$ , negativa per  $x < 0$ : la funzione ha un flesso per  $x = 0$ , ha concavità verso l'alto per  $x > 0$ , verso il basso per  $x < 0$ .

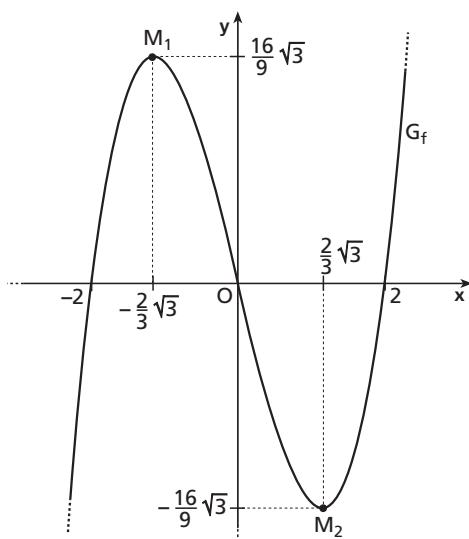
		-2		0		2	
	...	→					
x	-	-	0	+	+		
$x^2 - 4$	+	0	-	-	0	+	
f(x)	-	0	+	0	-	0	+

▲ Figura 2.

	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		max		min	

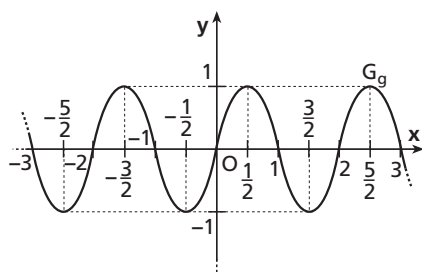
▲ Figura 3.

Nella figura 4 è riportato il grafico  $G_f$ .



◀ Figura 4.

Consideriamo la funzione  $g(x) = \sin \pi x$ : il suo grafico  $G_g$  può essere ottenuto dalla funzione  $y = \sin x$  tramite una contrazione orizzontale  $x' = \frac{x}{\pi}$ ; poiché il periodo della funzione  $y = \sin x$  è  $2\pi$ , il periodo di  $g(x) = \sin \pi x$  è  $T = 2$ . Rappresentiamo in figura 5 il suo grafico  $G_g$ .



◀ Figura 5.

2. Determiniamo le ascisse dei punti di intersezione di  $G_f$  con la retta  $y = -3$ , risolvendo il sistema:

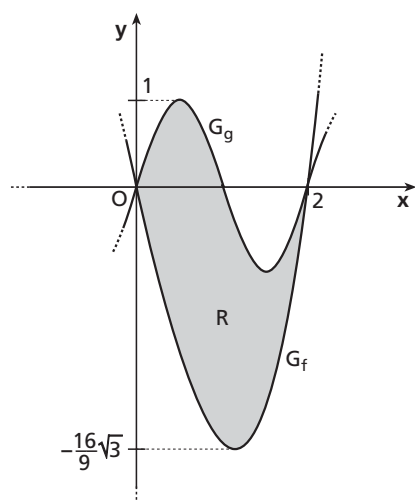
$$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^3 - 4x + 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \\ y = -3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Ricaviamo ora i punti di  $G_g$  a tangente orizzontale nell'intervallo  $[-6; 6]$ , deducendoli dal grafico di figura 5 e tenendo conto della periodicità 2 della funzione:

$$\begin{cases} x_k = \frac{1}{2} + k \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \text{ con } -6 \leq k \leq 5, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici  $G_f$  e  $G_g$  nell'intervallo  $[0; 2]$  (figura 6).

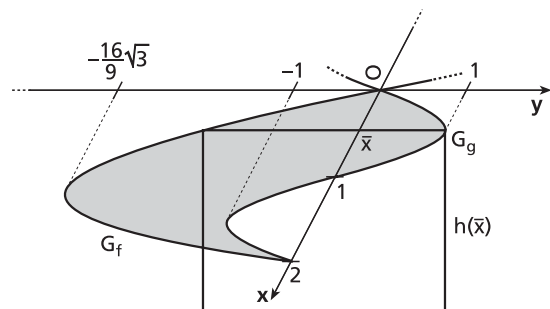


◀ Figura 6.

Calcoliamo la superficie  $S$  della regione  $R$  mediante l'integrale:

$$S = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_0^2 (\sin \pi x - x^3 + 4x) dx = \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi x - \frac{x^4}{4} + 2x^2 \right]_0^2 = -\frac{1}{\pi} - 4 + 8 + \frac{1}{\pi} = 4.$$

4. Calcoliamo il volume della vasca sezionando il solido con piani  $x = \bar{x}$ ,  $0 \leq \bar{x} \leq 2$  perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 7).



◀ Figura 7.

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza  $h(\bar{x}) = 3 - \bar{x}$  e base  $|g(\bar{x}) - f(\bar{x})|$ ; la superficie di tale rettangolo vale:

$$S(\bar{x}) = |g(\bar{x}) - f(\bar{x})| \cdot h(\bar{x}) = |\sin \pi \bar{x} - \bar{x}^3 + 4\bar{x}| \cdot (3 - \bar{x}).$$

Poiché nell'intervallo considerato  $g(x) \geq f(x)$ , possiamo tralasciare il valore assoluto.

Il volume  $V$  della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 [\sin \pi \bar{x} - \bar{x}^3 + 4\bar{x}](3 - \bar{x}) d\bar{x} = 3 \int_0^2 \sin \pi \bar{x} d\bar{x} - \int_0^2 \bar{x} \sin \pi \bar{x} d\bar{x} + \int_0^2 [-\bar{x}^3 + 4\bar{x}](3 - \bar{x}) d\bar{x} = \\ &= 3 \left[ -\frac{1}{\pi} \cos \pi \bar{x} \right]_0^2 - \int_0^2 \bar{x} \sin \pi \bar{x} d\bar{x} + \int_0^2 (\bar{x}^4 - 3\bar{x}^3 - 4\bar{x}^2 + 12\bar{x}) d\bar{x} = \\ &= 3(-1 + 1) - \int_0^2 \bar{x} \sin \pi \bar{x} d\bar{x} + \left[ \frac{\bar{x}^5}{5} - \frac{3\bar{x}^4}{4} - \frac{4\bar{x}^3}{3} + 6\bar{x}^2 \right]_0^2 = \end{aligned}$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$\begin{aligned}
 &= - \left[ - \frac{\bar{x}}{\pi} \cos \pi \bar{x} \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{\pi} \cos \pi \bar{x} d\bar{x} + \left[ \frac{2^5}{5} - \frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{4 \cdot 2^3}{3} + 6 \cdot 2^2 \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} - \left[ \frac{1}{\pi^2} \sin \pi \bar{x} \right]_0^2 + \left( \frac{32}{5} - 12 - \frac{32}{3} + 24 \right) = \\
 &= \frac{2}{\pi} + \frac{116}{5}.
 \end{aligned}$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm<sup>3</sup> equivale a 1 L:

$$V = \left( \frac{2}{\pi} + \frac{116}{15} \right) \text{m}^3 = \left( \frac{2}{\pi} + \frac{116}{15} \right) \cdot 10^3 \text{ L} \approx 8369,95 \text{ L}.$$