ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

PROBLEMA 1

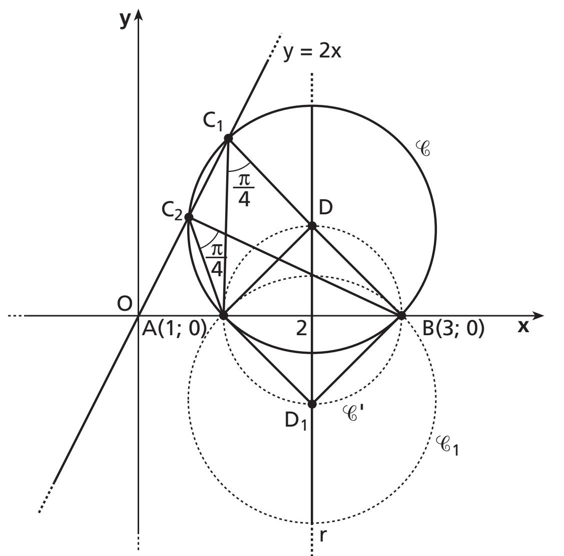
Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si considerino i triangoli *ABC* con $A(1;\,0)$, $B(3;\,0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$.

1. Si provi che i punti $(1;\,2)$ e $\left(\frac{3}{5};\,\frac{6}{5}\right)$ corrispondono alle due sole posizioni di C per cui è $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$.
2. Si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto, al variare di C, dall'ortocentro del triangolo *ABC*. Si tracci γ.
3. Si calcoli l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti a γ nei punti A e B.
4. Verificato che $\Omega = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$, si illustri una procedura numerica per il calcolo approssimato di $\ln 3$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2008

PROBLEMA 1

1. In un sistema cartesiano si considerano i punti $A(1;\,0)$, $B(3;\,0)$ e C variabile sulla retta di equazione $y = 2x$. I punti C del piano che formano angoli $A\hat{C}B = \frac{\pi}{4}$ stanno su due circonferenze, $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$, passanti per A e B, di centri D e D_1, tali che l'angolo al centro $A\hat{D}B = A\hat{D}_1B = \frac{\pi}{2}$ (figura 1).



▲ **Figura 1.**

Considerata la circonferenza $\mathscr{C}'$ di diametro AB ed equazione $(x-2)^2 + y^2 = 1$, e l'asse r del segmento AB, i punti D e D_1 risultano intersezione tra tale circonferenza e l'asse. Risolvendo il corrispondente sistema

$$\begin{cases}(x-2)^2 + y^2 = 1\\ x = 2\end{cases}$$

si ottiene $D(2;\,1)$ e $D_1(2;\,-1)$.
I raggi delle circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$ risultano pertanto $DA = D_1A = \sqrt{2}$.
Le equazioni delle due circonferenze sono quindi:

$\mathscr{C}$: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$,
$\mathscr{C}_1$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2$.

Mentre la circonferenza $\mathscr{C}_1$ non interseca la retta $y = 2x$, la circonferenza $\mathscr{C}$ interseca tale retta nei punti di coordinate soddisfacenti il sistema:

$$\begin{cases}(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2\\ y = 2x\end{cases} \quad \rightarrow \quad C_1\begin{cases}x = 1\\ y = 2\end{cases} \quad \wedge \quad C_2\begin{cases}x = \dfrac{3}{5}\\[2mm] y = \dfrac{6}{5}\end{cases}$$

2. Esprimiamo il punto C in coordinate parametriche: $C(t;\,2t)$, con $t \neq 0$ (per $t = 0$ il triangolo ABC è degenere). Poiché in un triangolo l'ortocentro è l'intersezione delle altezze, troviamo le equazioni delle altezze relative ai lati BC e AB che hanno equazioni, rispettivamente:

$$y = \frac{3-t}{2t}(x-1) \quad \text{e} \quad x = t.$$

Otteniamo quindi il generico ortocentro risolvendo il sistema:

$$\begin{cases}y = \dfrac{3-t}{2t}(x-1)\\[2mm] x = t\end{cases}$$

Eliminando il parametro si ottiene l'equazione cartesiana di γ, luogo geometrico dell'ortocentro, ossia:

$$y = \frac{3-x}{2x}(x-1) \;\rightarrow\; y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{2x}.$$

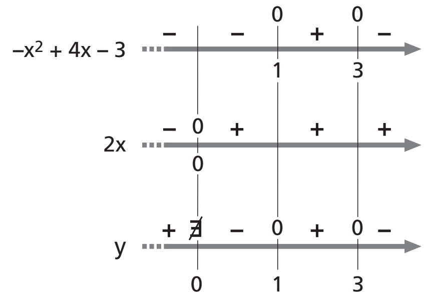
Indicata con $f(x)$ tale funzione, essa è definita nel campo reale per $x \neq 0$. Le intersezioni con l'asse delle ascisse sono i punti $A(1; 0)$, $B(3; 0)$. Per il segno della funzione, nella figura 2 è riportato il quadro dei segni.

La curva presenta un asintoto verticale di equazione $x = 0$ e un asintoto obliquo, che si ottiene calcolando i limiti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2+4x-3}{2x} = \mp\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x^2+4x-3}{2x^2} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{-x^2+4x-3}{2x} + \frac{x}{2} \right) = 2.$$

L'equazione dell'asintoto obliquo è dunque $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

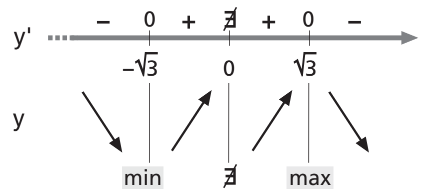


▲ **Figura 2.**

Calcoliamo la derivata prima e studiamo il suo segno (figura 3):

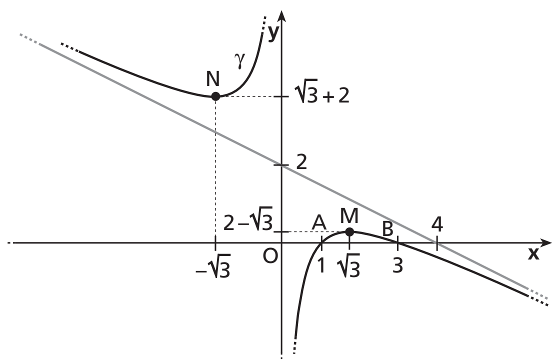
$$f'(x) = \frac{2x(-2x+4) - 2(-x^2+4x-3)}{4x^2} = \frac{-x^2+3}{2x^2}.$$

▼ **Figura 3.**



Esistono un punto di minimo relativo $N(-\sqrt{3}; \sqrt{3}+2)$ e un punto di massimo relativo $M(\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$.

Nella figura 4 è rappresentato il grafico γ della funzione $f(x)$.



▲ **Figura 4.**

3. Determiniamo le equazioni delle tangenti a γ in A e B.

La tangente in A è la retta per A con coefficiente angolare $f'(x_A) = f'(1) = 1$: la sua equazione è $y = x - 1$.

In modo analogo si trova $f'(x_B) = f'(3) = -\frac{1}{3}$ e la retta tangente a γ in B è la retta di equazione $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Tali rette si intersecano nel punto P, soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

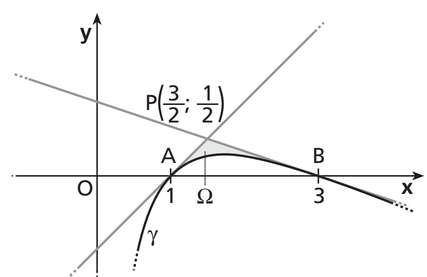
Nella figura 5 è evidenziata l'area Ω della parte di piano limitata da γ e dalle tangenti alla curva nei punti A e B.

Essa si calcola come differenza tra l'area del triangolo ABP e l'area della regione di piano delimitata dalla curva γ con l'asse x:

$$\Omega = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \int_1^3 \frac{-x^2+4x-3}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_1^3 \left(\frac{x}{2} - 2 + \frac{3}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{x^2}{4} - 2x + \frac{3}{2}\ln x \right]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{9}{4} - 6 + \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{4} + 2 = \frac{3}{2}(\ln 3 - 1).$$



▲ **Figura 5.**

L'area Ω cercata vale $\frac{3}{2}(\ln 3 - 1)$.

4. Posto $g(x)=\dfrac{1}{x}$, si osserva che $\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx=\ln 3$. Possiamo calcolare un valore approssimato di $\ln 3$ applicando il metodo dei trapezi all'integrale $\int_1^3 \dfrac{1}{x}\,dx$.

Dividiamo l'intervallo [1; 3] in $n=4$ parti uguali di ampiezza $h=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}$ e applichiamo il metodo di analisi numerica suddetto.

Costruiamo la seguente tabella.

x	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$g(x)=\frac{1}{x}$	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

Risulta:

$$\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx \simeq h\left[\frac{g(1)+g(3)}{2}+g(x_1)+g(x_2)+g(x_3)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\frac{1}{3}}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\right)=\frac{67}{60}=1{,}1166\ldots$$

L'errore commesso è maggiorato da $\varepsilon_4=\dfrac{(3-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot m$, con m valore massimo di $|g''(x)|$ in [1; 3] ovvero:

$$g''(x)=\frac{2}{x^3} \quad \rightarrow \quad m=2,$$

$$\varepsilon_4=\frac{(3-1)^3}{12\cdot 4^2}\cdot 2=\frac{1}{12}\simeq 0{,}08.$$

Pertanto risulta $\ln 3 \simeq 1{,}1$.