ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2001
Sessione ordinaria

PROBLEMA 1

Sia AB un segmento di lunghezza $2a$ e C il suo punto medio. Fissato un conveniente sistema di coordinate cartesiane monometriche (Oxy):

a) si verifichi che il luogo dei punti P tali che $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ (k costante positiva assegnata) è una circonferenza (circonferenza di Apollonio) e si trovi il valore di k per cui la soluzione degenera in una retta;

b) si determini il luogo geometrico γ dei punti X che vedono AC sotto un angolo di 45°;

c) posto X appartenente a γ in uno dei due semipiani di origine la retta per A e per B e indicato con α l'angolo $X\hat{A}C$ si illustri l'andamento della funzione $y = f(x)$ con $f(x) = \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2$ e $x = \text{tg}\,\alpha$.

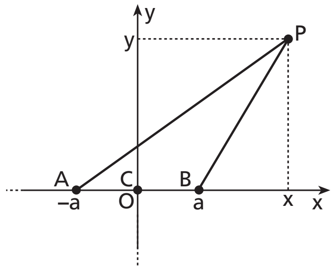
PROBLEMA 1

a) Fissato il sistema cartesiano di origine nel punto C e asse x passante per i punti A e B (figura 1), si prenda un punto $P(x; y)$ diverso da B (altrimenti la frazione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$ perderebbe di significato).

Si calcoli l'espressione $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = k$ attraverso la formula della distanza tra due punti:

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = k.$$

Essendo k positivo si elevano al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza e si ottiene:



▶ **Figura 1.**

$$(x+a)^2+y^2 = k^2[(x-a)^2+y^2] \to (1-k^2)x^2+(1-k^2)y^2+2a(1+k^2)x+(1-k^2)a^2=0.$$

Se $k=1$, l'equazione si riduce alla retta $x=0$ che è l'asse del segmento AB.

Se $k \neq 1$, si ottiene $x^2+y^2+2a\frac{(1+k^2)}{1-k^2}x+a^2=0$ con $x \neq a$. Si tratta di una circonferenza con centro nel punto $C'\left(-a\frac{1+k^2}{1-k^2}; 0\right)$ e raggio uguale a $\frac{2ka}{|1-k^2|}$.

b) La risoluzione non segue la via unicamente algebrica, perché troppo complessa, ma si basa su alcune considerazioni geometriche, ricordando che gli angoli alla circonferenza, che sottendono lo stesso arco, sono uguali. Osservando la figura 2, un punto del semipiano $y \geq 0$, che appartiene al luogo, è il vertice Q del triangolo rettangolo isoscele costruito sul cateto AC. Esso ha coordinate $Q(0; a)$. Costruita la circonferenza di diametro AQ, tutti i suoi punti di ordinata positiva soddisfano la proprietà richiesta dal luogo. Il centro della circonferenza, punto medio di AQ, ha coordinate $C_1\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$; il raggio vale $\frac{\overline{AQ}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Per $y \geq 0$, l'equazione del luogo geometrico è

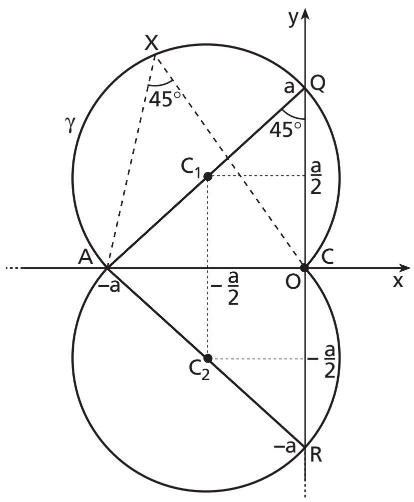
$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$$

ovvero $x^2+y^2+ax-ay=0$.
Con le stesse considerazioni si trova l'arco nel semipiano $y<0$:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2} \to x^2+y^2+ax+ay=0.$$

Pertanto la curva γ ha equazione:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax-ay=0 & \text{con } y \geq 0 \\ x^2+y^2+ax+ay=0 & \text{con } y<0 \end{cases}$$



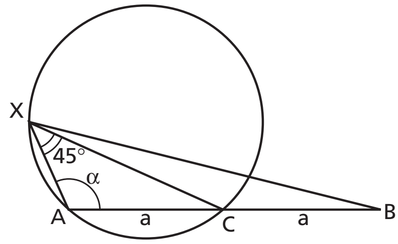
▶ **Figura 2.**

c) Si risolve la domanda per via trigonometrica.

Si osservi la figura 3. Per dimostrazione precedente, la circonferenza ha raggio uguale a $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Per il teorema della corda:

$$\overline{XA} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}(135° - \alpha) = a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha);$$



▲ **Figura 3.**

per il teorema di Carnot:

$$\overline{XB}^2 = \overline{AX}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{XA} \cdot \overline{AB} \cdot \cos\alpha =$$

$$= a^2 + 2a^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + 4a^2 - 2a(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) \cdot 2a \cdot \cos\alpha = 5a^2\operatorname{sen}^2\alpha + a^2\cos^2\alpha - 2a^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Risulta allora: $\left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2 = \frac{a^2(5\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)}{a^2(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha + 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha)} = \frac{5\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 1}$, con $\alpha \neq 90°$, e, tenendo conto delle assegnazioni nell'ipotesi, $x = \operatorname{tg}\alpha$ e $f(x) = \left(\frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}\right)^2$, si ricava:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}.$$

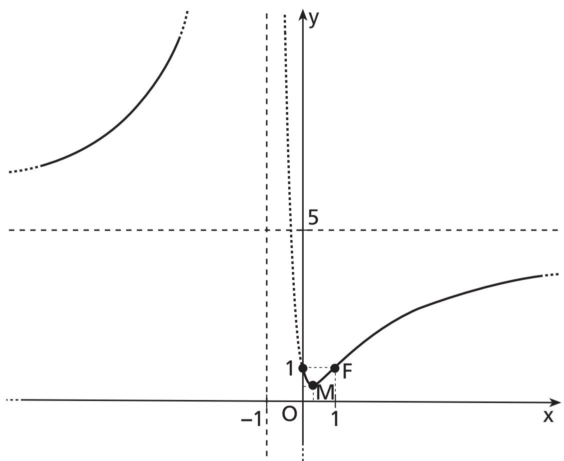
La funzione va considerata secondo le limitazioni geometriche del problema: poiché $0 \leq \alpha < 135° \wedge \alpha \neq 90°$, risulta $x < -1 \vee x \geq 0$.

Per completezza si svolge lo studio di $y = \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2}$ nel suo campo di esistenza.

Il C.E. è $x \neq -1$; la funzione non è né pari né dispari; interseca l'asse y nel punto $(0; 1)$ e non ha intersezioni con l'asse delle ascisse; è sempre positiva. Tenendo conto che $\lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = +\infty$ e $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2} = 5$, la curva ammette asintoto verticale $x = -1$ e asintoto orizzontale $y = 5$.

La derivata prima è $f'(x) = \frac{4(3x-1)}{(1+x)^3}$; pertanto la funzione è crescente per $x < -1$ e $x > \frac{1}{3}$ e decrescente per $-1 < x < \frac{1}{3}$. Ha minimo relativo $M\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.

La derivata seconda vale $f''(x) = \frac{24(1-x)}{(1+x)^4}$; dunque la curva ha concavità verso l'alto per $x < -1$ e $-1 < x < 1$ e concavità verso il basso per $x > 1$. Ha flesso $F(1; 1)$. Nella figura 4, la parte della curva che rispetta le condizioni geometriche è indicata con tratto continuo.



▲ **Figura 4.**