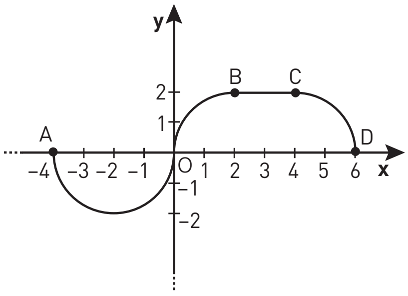
# ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
# CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

## PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4; 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro $AO$, dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi $O$ e $B$, del segmento $BC$ e dell'arco $CD$ di una parabola avente per asse di simmetria l'asse $x$.

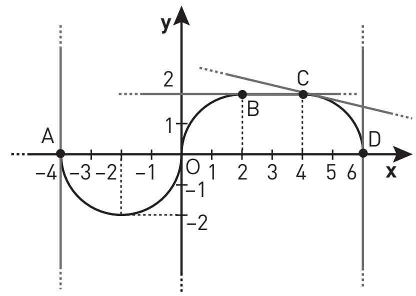



▲ **Figura 1.**

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti $A$, $O$, $B$, $C$, $D$.
2. Posto $f(x)=\int_{-4}^{x} g(t)dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4; 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla? E per quali $x$ è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

## PROBLEMA 1

**1.** Sia $g(x)$ la funzione continua nell'intervallo chiuso $[-4; 6]$ il cui grafico è rappresentato nella figura 4. Valutiamo se tale funzione è derivabile nei punti $A$, $O$, $B$, $C$, $D$, tenendo conto del significato geometrico della derivata prima di una funzione in un punto, ossia coincidente con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto.



▲ **Figura 4.**

- In $A(-4; 0)$: il grafico consiste a destra nella semicirconferenza di diametro $AO$; nel punto $A$ la tangente è verticale, pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a destra;
- in $O(0; 0)$: il grafico è rappresentato a sinistra dalla semicirconferenza di diametro $AO$, mentre a destra dal quarto di circonferenza di estremi $O$ e $B$; nel punto $O$ la tangente è verticale pertanto in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $B(2; 2)$: il grafico consiste, a sinistra, nel quarto di circonferenza, di estremi $O$ e $B$, mentre a destra, nel segmento orizzontale $BC$; nel punto $B$ la tangente è $y = 2$, pertanto in tale punto la funzione è derivabile, con valore $g'(2) = 0$;
- in $C(4; 2)$ il grafico è rappresentato, a sinistra, dal segmento orizzontale $BC$, pertanto $g'_-(4) = 0$, mentre, a destra, dall'arco $CD$ di una parabola avente per asse di simmetria l'asse $x$; troviamo l'equazione di tale arco imponendo alla generica parabola con vertice in $D$, $x = -ay^2 + 6$, il passaggio per il punto $C(4; 2)$:

  $$x = -ay^2 + 6 \quad \rightarrow \quad 4 = -a \cdot 2^2 + 6 \quad \rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad g(x) = \sqrt{12 - 2x},\ 4 \leq x \leq 6.$$

  Calcoliamo la derivata prima:

  $$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12 - 2x}} \quad \rightarrow \quad g'_+(4) = -\frac{1}{2},$$

  pertanto, essendo $g'_-(4) = 0$ e $g'_+(4) = -\dfrac{1}{2}$, in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $D(6; 0)$: l'arco di parabola ha nel vertice tangente verticale; pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a sinistra.

**2.** Posto $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$, calcoliamo $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il calcolo di aree comprese tra una curva e l'asse $x$.

- $\boldsymbol{f(-4)} = \int_{-4}^{-4} g(t)dt = 0.$
- $\boldsymbol{f(0)}$**.** Corrisponde all'opposto dell'area di metà cerchio di raggio 2:

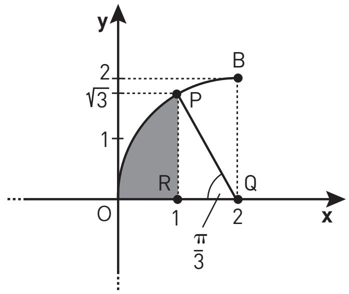
  $$f(0) = -\frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = -2\pi.$$
- $\boldsymbol{f(1)}$**.** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

  $$f(1) = \int_{-4}^{1} g(t)dt = \int_{-4}^{0} g(t)dt + \int_{0}^{1} g(t)dt = f(0) + \int_{0}^{1} g(t)dt = -2\pi + \int_{0}^{1} g(t)dt;$$

l'integrale $\int_0^1 g(t)dt$ corrisponde all'area evidenziata in figura 5; il triangolo $PQR$ risulta metà di un triangolo equilatero di lato 2 e altezza $\sqrt{3}$, mentre il settore circolare $OQP$ ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio 2; si può ottenere tale area come differenza tra l'area del settore circolare e l'area del triangolo $PQR$:

$$f(1) = -2\pi + \int_0^1 g(t)dt = -2\pi + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\right) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$




▲ **Figura 5.**

- ***f*(2).** Applichiamo l'additività integrale:

$$f(2) = \int_{-4}^{2} g(t)dt = \int_{-4}^{0} g(t)dt + \int_0^2 g(t)dt = f(0) + \int_0^2 g(t)dt.$$

Poiché l'integrale $\int_0^2 g(t)dt$ corrisponde a un quarto di cerchio di raggio 2, risulta:

$$f(2) = -2\pi + \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2 = -\pi.$$

- ***f*(4).** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

$$f(4) = \int_{-4}^{4} g(t)dt = \int_{-4}^{2} g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt = f(2) + \int_2^4 g(t)dt.$$

L'integrale $\int_2^4 g(t)dt$ rappresenta l'area di un quadrato di lato 2, pertanto vale:

$$f(4) = -\pi + 2^2 = -\pi + 4.$$

- ***f*(6).** Applichiamo nuovamente l'additività:

$$f(6) = \int_{-4}^{6} g(t)dt = \int_{-4}^{4} g(t)dt + \int_4^6 g(t)dt = f(4) + \int_4^6 g(t)dt.$$

Calcoliamo l'integrale $\int_4^6 g(t)dt$ come metà del segmento parabolico inscritto in un rettangolo di dimensioni 2 e 4:

$$f(6) = -\pi + 4 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot(2\cdot 4)\right) = -\pi + 4 + \frac{8}{3} = -\pi + \frac{20}{3}.$$

**3.** Per valutare il segno della funzione $f(x) = \int_{-4}^{x} g(t)dt$ ricordiamo che per il teorema fondamentale del calcolo integrale risulta $f'(x) = g(x)$, con $-4 < x < 6$; dal grafico di $g(x)$ di figura 4 e dai risultati al punto 2 ne segue che:

– per $-4 < x < 0$, $g(x) < 0$ $\rightarrow$ $f'(x) < 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ decrescente con $f(-4) = 0$ e $f(0) = -2\pi$;
– per $x = 0$, $g(0) = 0$ $\rightarrow$ $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ ha punto stazionario per $x = 0$;
– per $0 < x \leq 2$, $g(x) > 0$ $\rightarrow$ $f'(x) > 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(0) = -2\pi$ e $f(2) = -\pi$;
– per $2 < x \leq 4$, $g(x) = 2$ $\rightarrow$ $f'(x) = 2$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(2) = -\pi$ e $f(4) = -\pi + 4$;
– per $4 < x < 6$, $g(x) > 0$ $\rightarrow$ $f'(x) > 0$ $\rightarrow$ $f(x)$ crescente con $f(4) = -\pi + 4$ e $f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$.

Dal quadro si deduce che esiste un $\bar{x} \in ]2; 4[$, zero della funzione ovvero:

$$f(\bar{x}) = 0 \rightarrow \int_{-4}^{2} g(t)dt + \int_{2}^{\bar{x}} g(t)dt = 0 \rightarrow f(2) + \int_{2}^{\bar{x}} 2dt = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\pi + 2(\bar{x} - 2) = 0 \rightarrow \bar{x} = 2 + \frac{\pi}{2}.$$

In sintesi:

- $f(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$;
- $f(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) = 0$ per $x = -4 \vee x = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Per valutare il segno della derivata seconda $f''(x)$ sfruttiamo nuovamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, ricavando che $f''(x) = g'(x)$, con $-4 < x < 6$. Osservando la crescenza e decrescenza del grafico di $g(x)$ di figura 4 si deduce che:

- $f''(x) > 0$ per $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 2$;
- $f''(x) < 0$ per $-4 < x < -2 \vee 4 < x < 6$;
- $f''(x) = 0$ per $2 \leq x < 4 \vee x = -2$.

Si osserva che per il punto 1 la funzione $f''(x) = g'(x)$ non è definita per

$$x = -4 \wedge x = 0 \wedge x = 4 \wedge x = 6.$$

**4.** Dai precedenti punti sintetizziamo le informazioni sulla funzione $f(x)$:

- è una funzione definita continua nell'intervallo $[-4. 6]$;
- passa per i punti:

  $$A'(-4; 0),\ O'(0; -2\pi),\ B'(2; -\pi),\ C'(4; -\pi + 4),\ D'\left(6; -\pi + \frac{20}{3}\right);$$

- ha segno:
  – $f(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$;
  – $f(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
  – $f(x) = 0$ per $x = -4 \vee x = 2 + \frac{\pi}{2}$;
- ha derivata prima tale che:
  – $f(x)$ decrescente per $-4 < x < 0$,

– $f'(0)=0$ allora $x=0$ punto stazionario;

– $f(x)$ crescente per $0<x<6$,

pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione ha minimo assoluto nel punto $O'(0; -2\pi)$, massimo relativo per $x=6$ e $x=-4$ con $f(6)=-\pi+\frac{20}{3}$, $f(-4)=0$ e quindi massimo assoluto in $D'\left(6; -\pi+\frac{20}{3}\right)$;

- ha derivata seconda tale che la funzione ha:
  – concavità verso l'alto per $-2<x<0 \vee 0<x<2$;
  – concavità verso il basso per $-4<x<-2 \vee 4<x<6$;
  – un flesso per $x=-2$, $F(-2; -\pi)$, mentre $f''(x)=0$ per $2\leq x<4$, pertanto il grafico è un segmento $B'C'$, sorretto dalla retta di equazione $y=2x+\pi-4$.

In figura 6 è riportato l'andamento della funzione $f(x)$.

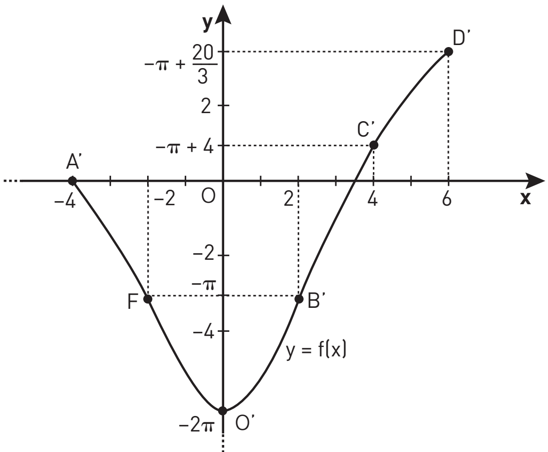



**Figura 6.**