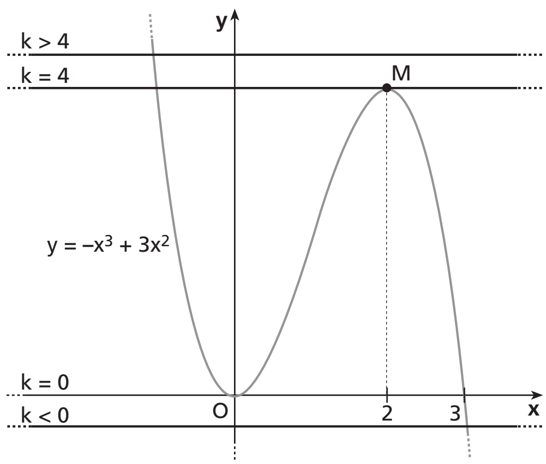
7 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$

7 Data l'equazione $x^3 - 3x^2 + k = 0$, la scriviamo come $-x^3 + 3x^2 = k$.
Risolverla equivale a risolvere il sistema seguente:

$$\begin{cases} y = -x^3 + 3x^2 \\ y = k \end{cases}$$

ovvero a cercare i punti di intersezione tra la curva di equazione $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$ e il fascio di rette improprio $y = k$ parallelo all'asse x.
La funzione $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ha dominio $\mathbb{R}$, ha intersezioni con gli assi nei punti $(0; 0)$ e $(3; 0)$, è positiva o nulla per $x \leq 3$ e negativa per $x > 3$.
Poiché la derivata prima vale $f'(x) = -3x^2 + 6x$, la funzione risulta crescente per $0 < x < 2$, decrescente per $x < 0$ e $x > 2$; ha pertanto un minimo in $O(0; 0)$ e un massimo in $M(2; 4)$.
Nella figura 15 sono tracciati il grafico di $f(x)$ e alcune rette del fascio $y = k$.
Osservando le intersezioni tra le rette del fascio e la curva $f(x)$, si deduce che l'equazione di partenza $x^3 - 3x^2 + k = 0$ ammette:



▲ **Figura 15.**

- per $k < 0$ e $k > 4$, una soluzione reale;
- per $k = 0$ e $k = 4$, tre soluzioni reali, di cui due coincidenti;
- per $0 < k < 4$, tre soluzioni reali e distinte.