PROBLEMA 1

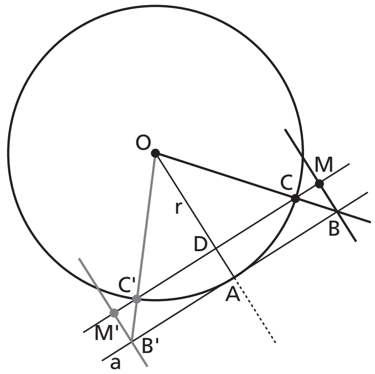
In un piano è data la circonferenza λ di centro O e raggio $OA = r$; conduci per A la retta a tangente a λ e una semiretta di origine O che intersechi la tangente nel punto B e la circonferenza in C. La retta passante per C e parallela ad a incontra in D il segmento OA e in M la parallela ad OA passante per B.

1. Dimostra che valgono le proporzioni: $\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}$, $\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DA}$.
2. Dimostra che il luogo geometrico Γ descritto da M al variare di B è simmetrico rispetto alla retta OA.
3. Scelto il riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e l'asse y passante per A orientato come la semiretta OA, verifica che l'equazione della curva Γ descritta da M al variare di B è: $f(x) = \dfrac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}$.
4. Traccia il grafico di Γ.
5. Posto $r = 2$ considera il solido Ω avente
   - per base la regione di piano delimitata dal semiasse positivo delle x, dall'asse y e da Γ;
   - come sezioni ortogonali al piano $(x; y)$ i triangoli equilateri di lato $l = f(x)$.

Verifica che il volume di Ω è: $\pi\sqrt{3}$.

PROBLEMA 1

1. Osserviamo la figura.



◀ **Figura 1.**

Il triangolo ODC è simile a OAB per costruzione; $\overline{OC} = \overline{OA}$, $\overline{DM} = \overline{AB}$ per costruzione; pertanto:

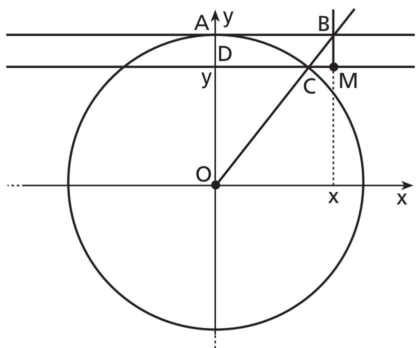
$$\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OA} : \overline{AB} \quad \rightarrow \quad \overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}.$$

Il triangolo ODC è simile a BCM per costruzione; $\overline{OC} = \overline{OA}$, $\overline{DA} = \overline{MB}$ per costruzione; pertanto:

$$\overline{OC} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{BM} \quad \rightarrow \quad \overline{OA} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DA}.$$

2. Nella simmetria assiale di asse OA le rette AB e DM sono globalmente invarianti, quindi la semiretta uscente da O e simmetrica alla semiretta OB incontra la retta AB in B' simmetrico di B e la retta DM in C' simmetrico di C. La parallela ad OA condotta per B' è pertanto simmetrica di BM, quindi interseca la retta DM nel punto M' simmetrico di M.

3. Posto il riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e l'asse y passante per A orientato come la semiretta OA, indichiamo con $(x; y)$ le coordinate di M.



◀ **Figura 2.**

Scriviamo la proporzione $\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}$ utilizzando le coordinate:

$$y : \overline{DC} = r : x \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = \frac{xy}{r}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODC:

$$\overline{DC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{DC}^2 + y^2 = r^2.$$

Sostituiamo a $\overline{DC}$ la precedente espressione e riduciamo:

$$\frac{x^2y^2}{r^2} + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{r^4}{x^2 + r^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\pm r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Accettiamo soltanto il segno positivo perché, per costruzione, la curva giace nel I e nel II quadrante (gli angoli $A\hat{O}B$ sono acuti), quindi:

$$f(x) = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

4. Campo di esistenza: $\mathbb{R}$; segno: $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; $f(0) = r$; $f(x)$ è: pari. La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
Asintoti:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}} = 0, \qquad \text{l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.}$$

Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{r^2 x}{\sqrt{(x^2 + r^2)^3}}$. Pertanto:

$x < 0 \rightarrow f'(x) > 0$, $\quad f(x)$ crescente;

$x > 0 \rightarrow f'(x) < 0$, $\quad f(x)$ decrescente;

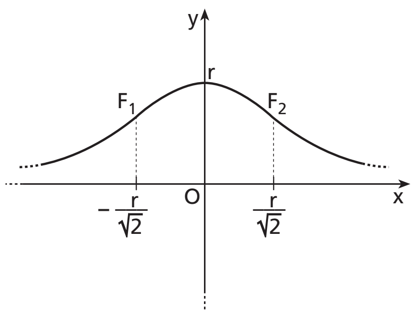
$x = 0 \rightarrow f'(x) = 0$, $\quad$ punto di massimo relativo e assoluto.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{r^2(2x^2 - r^2)}{\sqrt{(x^2 + r^2)^5}}$. Pertanto:

$-\dfrac{r}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) < 0,$ $\quad$ concavità verso il basso;

$x < -\dfrac{r}{\sqrt{2}} \vee x > \dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) > 0,$ $\quad$ concavità verso il basso;

$x = \pm\dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0,$ $\quad$ punti di flesso.



◀ **Figura 3.**

5. Posto $r = 2$ la funzione assume l'espressione: $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Per rappresentare il solido Ω utilizziamo un riferimento tridimensionale.

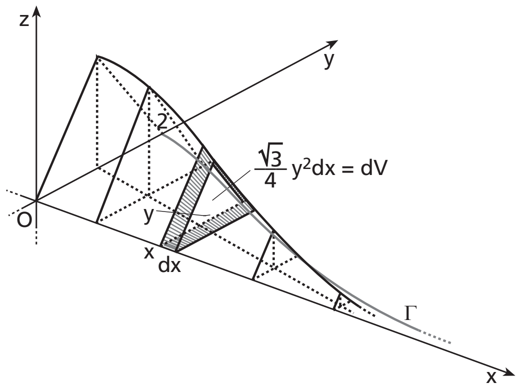


Figura 4.

Consideriamo una generica sezione del solido di ascissa x e scriviamo l'espressione del corrispondente elemento infinitesimo di volume:

$$dV = \left(\frac{1}{2} y \frac{\sqrt{3}}{2} y\right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2\, dx = \frac{4\sqrt{3}}{x^2+4}\, dx.$$

Per determinare il volume di Ω calcoliamo l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{4\sqrt{3}}{x^2+4}\, dx = 4\sqrt{3} \lim_{m\to+\infty} \int_0^m \frac{1}{x^2+4}\, dx = 4\sqrt{3} \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx =$$

$$= \sqrt{3} \lim_{m\to+\infty} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}\right]_0^m = 2\sqrt{3} \lim_{m\to+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{m}{2}\right) = 2\sqrt{3}\, \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{3}.$$