

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

Considera la famiglia di funzioni

$$f_k(x) = \begin{cases} k \ln x^x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0$$

e la funzione $g(x) = \begin{cases} \ln x^{-x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$.

1. Determina per quale valore di k la funzione f_k e g hanno la stessa tangente nel punto di ascissa 1.
2. Detta f la funzione determinata al punto precedente, studia la continuità e la derivabilità di f e g nel punto $x = 0$.
3. Studia le funzioni f e g e disegna i grafici riferiti allo stesso sistema cartesiano ortogonale.
4. Calcola l'area della regione finita di piano delimitata da f e da g , appartenente al semipiano $x \geq \frac{1}{4}$.

SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 1

1. Riscriviamo le funzioni applicando le proprietà del logaritmo:

$$f_k(x) = \begin{cases} kx \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad k > 0; \quad g(x) = \begin{cases} x^2 \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Tutte le funzioni date sono continue e derivabili per $x > 0$, con derivate:

$$f'_k(x) = k \ln x + k, \quad g'(x) = 2x \ln x + x \quad \text{quindi } f'_k(1) = k, \quad g'(1) = 1.$$

Perciò f_k e g hanno la stessa tangente in $x = 1$ se $f'_k(1) = g'(1)$, ossia se

$$k = 1.$$

2. Indichiamo con $f(x)$ la funzione $f_1(x)$ corrispondente a $k = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \quad (\text{De L'Hospital}) \quad \text{pertanto } f \text{ è continua per } x = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{f(0+b) - f(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \ln b = -\infty.$$

La f non è derivabile in $x = 0$ nel senso che la derivata diverge negativamente quindi ha per tangente l'asse delle ordinate.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = 0, \text{ pertanto } g \text{ è continua in } x = 0.$$

$$\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{g(0+b) - g(0)}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{b^2 \ln b - 0}{b} = \lim_{b \rightarrow 0^+} b \ln b = 0.$$

La g è derivabile in $x = 0$ e ha per tangente l'asse delle ascisse.

3. Studio di f e g .

Segno di f e intersezioni con gli assi:

$$x \ln x > 0 \quad \text{per } x > 1$$

$$\rightarrow f(x) < 0 \quad \text{se } 0 < x < 1$$

$$f(x) > 0 \quad \text{se } x > 1$$

$$f(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$\rightarrow f$ non ha asintoti orizzontali né obliqui.

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0 \text{ per } x > e^{-1} \rightarrow f \text{ è crescente per } x > e^{-1}$$

$$f \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-1}$$

$$A(e^{-1}; -e^{-1}) \text{ minimo relativo e assoluto.}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \forall x > 0 \rightarrow \text{concavità verso l'alto.}$$

Segno di g e intersezioni con gli assi:

$$x^2 \ln x > 0 \text{ per } x > 1 \rightarrow g(x) < 0 \text{ se } 0 < x < 1$$

$$g(x) > 0 \text{ se } x > 1$$

$$g(1) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \rightarrow g \text{ non ha asintoti orizzontali né obliqui.}$$

Derivata prima: crescita e decrescenza,
massimi e minimi:

$$g'(x) = x(2 \ln x + 1) > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow g \text{ è crescente per } x > e^{-\frac{1}{2}}$$

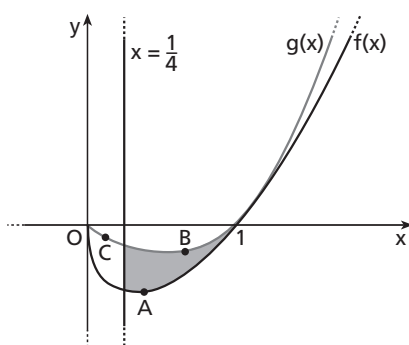
$$\rightarrow g \text{ è decrescente per } 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$$

$$B\left(e^{-\frac{1}{2}}; -\frac{1}{2}e^{-1}\right) \text{ min. rel. e assoluto.}$$

$$g''(x) = 2 \ln x + 3 > 0 \text{ per } x > e^{-\frac{3}{2}} \rightarrow \text{concavità verso l'alto per } x > e^{-\frac{3}{2}}$$

$$\text{concavità verso il basso per } 0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$$

$$C\left(e^{-\frac{3}{2}}; -\frac{3}{2}e^{-3}\right) \text{ punto di flesso.}$$



◀ Figura 1.

4. L'area richiesta è data dal seguente integrale che calcoleremo per parti:

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 (x^2 \ln x - x \ln x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{4}}^1 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{192} \ln 4 - \frac{1}{32} \ln 4 - \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} \right) dx = -\frac{5 \ln 4}{192} - \left[\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{4}}^1 = \dots = \frac{1}{8} - \frac{5 \ln 2}{96}.$$