7 Dimostra che la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

è biiettiva nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Determina il campo di esistenza, il codominio e l'espressione analitica della funzione inversa.

7 La funzione data è continua (il denominatore non ha radici reali ed è positivo $\forall x \in \mathbb{R}$) e derivabile su $\mathbb{R}$. Dallo studio della sua derivata prima

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

otteniamo:

$$x < -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \text{ e } f \text{ crescente;}$$

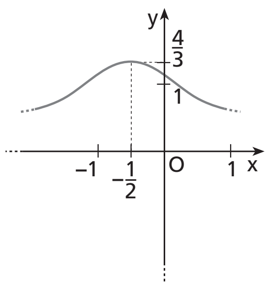
$$x > -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \text{ e } f \text{ decrescente;}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ e } M\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{3}\right) \text{ max rel. e ass.}$$

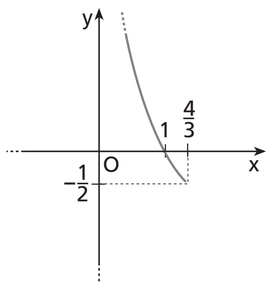
Nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ la funzione è monotona decrescente e quindi è biiettiva e perciò invertibile (figura 12.a).

Questo intervallo è anche il codominio della funzione inversa.

Poiché in tale intervallo la f è strettamente positiva e $\frac{4}{3}$ è il massimo assoluto, l'intervallo $\left]0; \frac{4}{3}\right]$ è il codominio di f e quindi il dominio della sua inversa f^{-1} (figura 12.b).



a. La funzione f.



b. La funzione inversa di f.

Figura 12.

Per determinare l'espressione analitica di f^{-1} poniamo $y = f(x)$ e risolviamo l'equazione ottenuta rispetto alla variabile x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{x^2+x+1} \\ x \in \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[; \ y \in \left]0; \dfrac{4}{3}\right] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} yx^2 + yx + y - 1 = 0 \\ \ldots; \ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{y} - 3} \\ \ldots; \ldots \end{cases}.$$

Scegliamo la soluzione con «+», compatibile con la condizione $x \geq -\frac{1}{2}$ e scambiamo le due variabili per ottenere l'espressione analitica di f^{-1}:

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{x} - 3}.$$