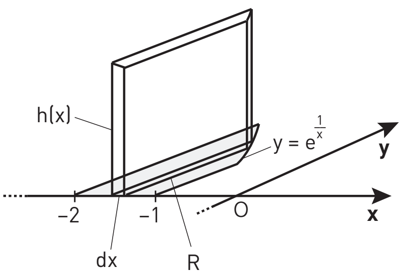
4 Un solido Ω ha per base la regione R delimitata dal grafico $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e dall'asse x sull'intervallo $[-2; -1]$. In ogni punto di R di ascissa x, l'altezza del solido è data da $h(x) = \frac{1}{x^2}$. Si calcoli il volume del solido.

4 La funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ è definita positiva nell'intervallo $[-2; -1]$ e la derivata prima $f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ è sempre negativa: pertanto la funzione è decrescente. La derivata seconda $f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4}(1 + 2x)$ è sempre negativa nell'intervallo di definizione e la funzione ha concavità rivolta verso il basso.

Rappresentiamo in figura 11 la regione R delimitata dal grafico e dall'asse x sull'intervallo $[-2; -1]$. Consideriamo il solido Ω che ha per base la regione R e per ogni punto di ascissa x l'altezza $h(x) = \frac{1}{x^2}$.



◀ **Figura 11.**

Determiniamo il volume del solido Ω come la somma integrale dei parallelepipedi di area di base $e^{\frac{1}{x}}\,dx$ e altezza $\frac{1}{x^2}$:

$$V = \int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}dx = -\int_{-2}^{-1} e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = -\left[e^{\frac{1}{x}}\right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{e}-1}{e}.$$