PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2; 2).

d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

PROBLEMA 2

a) Le curve di equazione $y = f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ sono funzioni polinomiali continue e derivabili nell'insieme dei numeri reali. Le derivate prime hanno forma: $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e, per definizione di derivata, esse si annullano nei punti in cui la tangente è parallela all'asse x. Pertanto, ponendo $y' = 0$, si ottiene $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$ che ha soluzioni $x = 0$ e $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 32b}}{8}$. Si conclude che nel punto $x = 0$, in cui ogni curva seca l'asse y, le curve [1] hanno tangente parallela all'asse x.

b) Data una funzione con derivata prima e seconda continue in un intervallo, condizione sufficiente affinché essa rivolga la concavità verso l'alto in un punto x_0, interno all'intervallo, è che la derivata seconda in quel punto sia positiva. Se $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$, la derivata prima è $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$ e la derivata seconda ha espressione: $y'' = 12x^2 + 6ax + 2b$. Posto $y'' > 0$, risulta:

$$12x^2 + 6ax + 2b > 0 \quad \rightarrow \quad 6x^2 + 3ax + b > 0\,.$$

L'equazione associata, $6x^2 + 3ax + b = 0$, ammette soluzioni reali $x = \dfrac{-3a \pm \sqrt{9a^2 - 24b}}{12}$, con $\Delta = 9a^2 - 24b \geq 0$.
Pertanto la disequazione è sempre verificata nel campo reale se il discriminante Δ è negativo. La funzione rivolge la concavità verso l'alto su tutto $\mathbb{R}$ se vale la seguente relazione tra a e b:

$$9a^2 - 24b < 0 \quad \rightarrow \quad 3a^2 - 8b < 0\,.$$

La condizione è sufficiente e può non contemplare altri casi in cui la funzione ha concavità verso l'alto su tutto il campo reale. È infatti necessario discutere il segno della derivata prima e della derivata seconda, in relazione al discriminante Δ.
Se $\Delta > 0$, cioè $3a^2 - 8b > 0$, la derivata seconda è negativa in un intervallo. In esso la funzione ha concavità rivolta verso il basso. Pertanto, per $3a^2 - 8b > 0$, la curva non mantiene la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza.
Se $\Delta = 0$, cioè $3a^2 = 8b$, la derivata seconda è positiva per $x \neq -\dfrac{a}{4}$ e nulla per $x = -\dfrac{a}{4}$. La derivata prima, $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx$, diventa $y' = x\left(4x^2 + 3ax + \dfrac{3}{4}a^2\right)$: essa è negativa per $x < 0$, nulla per $x = 0$, positiva per $x > 0$. Pertanto la funzione ha un minimo in $x = 0$ e non possiede flessi: essa presenta concavità verso l'alto in $\mathbb{R}$.
In conclusione, la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ rivolge la concavità verso l'alto nel suo campo di esistenza $\mathbb{R}$ se a e b soddisfano la relazione: $3a^2 - 8b \leq 0$.

c) Nella soluzione del punto a) si è trovato che la curva parametrica ha tangente orizzontale nel punto $x = 0$, ovvero nel punto del grafico di coordinate $(0;\, c)$. Affinché vi sia un flesso, è necessario che la derivata seconda $f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b$ si annulli per $x = 0$ cioè $f''(0) = 0$. Risulta quindi:

$$f''(0) = 2b = 0 \quad \rightarrow \quad b = 0.$$

Se la tangente orizzontale inflessionale in $(0;\, c)$ interseca la curva in un ulteriore punto, $(2;\, 2)$, si deduce che $c = 2$.
Infine, poiché la curva passa per il punto $(2;\, 2)$ deve valere $2 = f(2)$, cioè:

$$2 = 2^4 + a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \quad \rightarrow \quad 8a + 4b + c = -14.$$

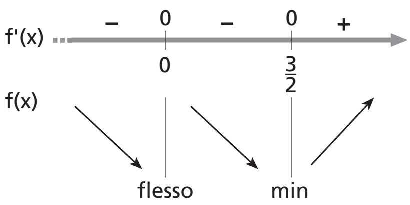
Si pongono a sistema le relazioni trovate:

$$\begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ 8a+4b+c=-14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

La curva ha equazione: $y=x^4-2x^3+2$.

d) La curva K ha equazione $f(x)=x^4-2x^3+2$ e si ha: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$. Per $x<0$ la funzione è sempre positiva e in questa regione la curva è situata sopra l'asse x. Rimane da valutare l'andamento per $x\geq 0$. La derivata prima è $f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$ e la tabella del suo segno è riportata nella figura 4.

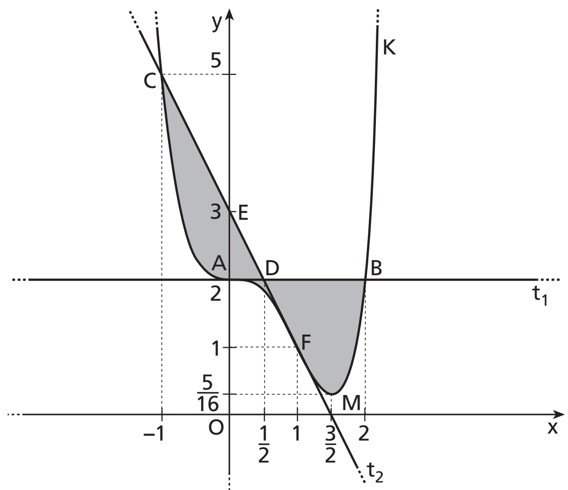
Per $0\leq x<\frac{3}{2}$ la funzione è decrescente, per $x>\frac{3}{2}$ la funzione è crescente e $x=\frac{3}{2}$ è minimo assoluto. Poiché il minimo ha immagine $f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^4-2\left(\frac{3}{2}\right)^3+2=\frac{5}{16}$ positiva, per definizione di crescenza e decrescenza e tenendo conto della continuità, la funzione è positiva nei due intervalli e quindi per $x\geq 0$.



▲ **Figura 4.**

In conclusione il grafico della funzione è situato sopra l'asse delle x.

e) Si studia la curva K di equazione $f(x)=x^4-2x^3+2$ per rappresentarla in un sistema cartesiano. Il campo di esistenza è quello dei numeri reali. Per le dimostrazioni precedenti, essa interseca l'asse y nel punto $A(0;\,2)$, dove ha un flesso orizzontale con tangente inflessionale di equazione t_1: $y=2$; è sempre positiva ed ha un minimo di coordinate $M\left(\frac{3}{2};\,\frac{5}{16}\right)$. La derivata seconda vale $f''(x)=12x^2-12x$, pertanto la funzione ha un ulteriore flesso nel punto $x=1$, di coordinate $F(1;\,1)$. La corrispondente tangente inflessionale ha equazione t_2: $y-1=f'(1)\,(x-1)$ cioè $y=-2x+3$. Essa interseca la curva anche nel punto $C(-1;\,5)$. Le rette t_1 e t_2 si intersecano in un punto D di coordinate $D\left(\frac{1}{2};\,2\right)$. Nella figura 5 è tracciata la curva, le tangenti inflessionali e la regione compresa tra esse.



◀ **Figura 5.**

La regione finita di piano è formata dal triangolo *ADE* e da due figure mistilinee *CAE* e *AFMB*, di superficie rispettivamente S_{ADE}, S_{CAE} e S_{AFMB}. Esse si calcolano per via geometrica e per via integrale nel modo seguente:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{AD} \cdot \overline{AE} \quad \rightarrow \quad S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4};$$

$$S_{CAE} = \int_{-1}^{0} (-2x + 3 - x^4 + 2x^3 - 2)dx = \left[-x^2 + x - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^{0} = \frac{13}{10};$$

$$S_{AFMB} = \int_{0}^{2} (2 - x^4 + 2x^3 - 2)dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4\right]_{0}^{2} = \frac{8}{5}.$$

L'area *S* della regione finita di piano delimitata dalla curva *K* e dalle tangenti inflessionali vale:

$$S = S_{ADE} + S_{CAE} + S_{AFMB} \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{4} + \frac{13}{10} + \frac{8}{5} = \frac{63}{20}.$$

